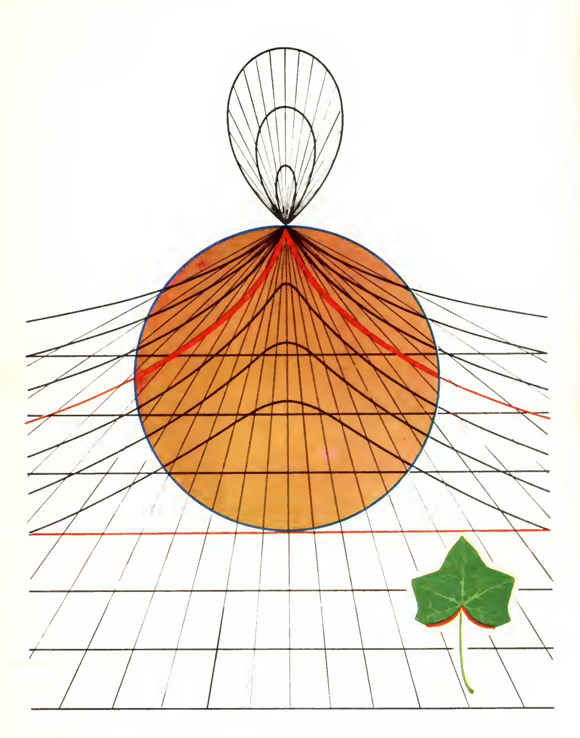
Квант

7
1977

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





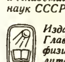
Здесь изображено семейство замечательных кривых — циссоид. Название «циссоида» происходит от греческого κιττοειδ-ηζ (плющеподобная). Жирной красной линией показан тот участок циссоиды, который рассматривался Диоклессом. Похожий на нее участок контура листа плюща также обведен красной линией. (см. с. 46).

Основан в 1970 году



7
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Издательство „Наука“ Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки изображен рисунок доктора физико-математических наук А. Г. Фоменко. Подробнее об этом топологическом объекте можно прочитать на с. 22.

А. Кириллов

О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма



1. Пролог

Задачи на геометрические построения — одни из самых популярных в школьной математике. Почти в каждом математическом кружке разбираются такие задачи. Это, конечно, не случайно. История геометрических построений насчитывает несколько тысяч лет, и уже древние греки достигли здесь большого искусства. В качестве примера можно привести задачу Аполлония: *построить окружность, касающуюся трех данных окружностей* *).

Многим, вероятно, известны три знаменитые задачи древности, оказавшиеся неразрешимыми: *о квадратуре круга, трисекции угла* и *удвоении куба* **).

Но, пожалуй, самой красивой является задача о построении правильных многоугольников. Собственно говоря, это не одна задача, а целая серия задач: *для каждого натурального числа $n \geqslant 3$ требуется с помощью циркуля и линейки построить правильный n-угольник.*

Для некоторых значений n эта задача совсем простая (например, для $n = 3, 4, 6, 8, 12$); для других — посложнее ($n = 5, 10, 15$; ниже мы расскажем, как построить десятиугольник и пятиугольник); для третьих — очень сложная ($n = 17$ или 257)*). Наконец, существуют такие значения n, для которых эта задача вообще неразрешима (например, $n = 7, 9, 11$).

Выпишем подряд несколько натуральных чисел, начиная с $n = 3$, и отметим красным цветом те числа n, для которых можно построить правильный n-угольник циркулем и линейкой: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, ...

Есть ли какая-нибудь закономерность в распределении «красных» и «черных» чисел? Оказывается, есть; но найти ее довольно трудно. Эта закономерность имеет арифметическую природу; чтобы ее описать, нам придется временно оставить геомет-

---

*) См. статью «Инверсия и задача Аполлония» («Квант», 1971, № 8).

**) По поводу последних двух задач см. статью «Циркулем и линейкой» («Квант», 1975, № 6).

*) Способ построения циркулем и линейкой правильного семнадцатиугольника впервые был открыт К. Ф. Гауссом в 1801 году. Этот способ описывается в статье «Дебют Гаусса» («Квант», 1971, № 1).

рию и заняться элементами теории чисел — высшего раздела арифметики.

2. Функция Эйлера

Важной арифметической характеристикой числа n является количество чисел, меньших n и взаимно простых с n. Одним из первых это заметил знаменитый математик XVIII века Леонард Эйлер. Он предложил для этого количества обозначение $\varphi(n)$, и с тех пор функция $n \to \varphi(n)$ известна под именем *«функции Эйлера»* *). Например, для $n = 10$ имеется четыре числа, меньших десяти и взаимно простых с ним: 1, 3, 7 и 9; так что $\varphi(10) = 4$.

Функция φ обладает многими интересными свойствами. Одно из них было открыто еще самим Эйлером: *для любых двух взаимно простых чисел m и n справедливо равенство*:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n). \qquad (1)$$

Кроме того, легко проверить, что *если p — простое число, то* $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^2) = p^2 - p$, и вообще

$$\varphi(p^m) = p^{m-1}(p - 1). \qquad (2)$$

Эти свойства позволяют легко вычислять функцию Эйлера для небольших значений n. Например,

$$\varphi(10) = \varphi(2)\cdot\varphi(5) = 1\cdot 4 = 4,$$
$$\varphi(100) = \varphi(4)\cdot\varphi(25) = 2\cdot 20 = 40.$$

Мы приводим здесь значения функции Эйлера для n от 1 до 42 (см. таблицы 1, *а* и *б*).

Таблица 1, *а*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Таблица 1, *б*

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$\varphi(n)$	12	10	22	8	20	12	24	12	28	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24	16	40	12

Сравните эти таблицы с приведенным выше рядом «красных» и «черных» чисел. Не правда ли, связь между «цветом» чисел n и значением $\varphi(n)$ уже легко угадывается? Мы видим, что если правильный n-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки, то соответствующее значение функции $\varphi(n)$ является степенью двойки. Оказывается, это условие является необходимым и достаточным для возможности построения правильного n-угольника.

В настоящей статье мы не сможем строго доказать это. Однако мы приведем достаточно простые и убедительные соображения в пользу этого факта. Аналогичные соображения применимы и ко многим другим задачам на построение — например, к задаче о трисекции угла.

3. Что значит «построить»?

Вопрос о точной постановке задач на построение циркулем и линейкой уже обсуждался на страницах «Кванта». Мы не будем здесь еще раз предостерегать читателей от неправильного употребления математических инструментов. Скажем лишь, что окончательное решение задачи на построение должно быть (хотя бы в

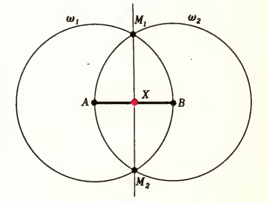


Рис. 1.

*) На страницах «Кванта» функция Эйлера упоминалась неоднократно. Подробно о ней рассказано в статье «Малая теорема Ферма» («Квант», 1972, № 10); некоторые ее свойства перечислены также в статье «Близкие дроби» («Квант», 1975, № 3).

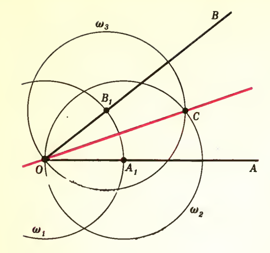


Рис. 2.

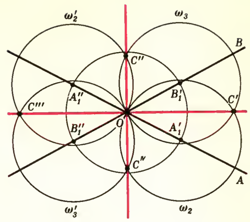


Рис. 3.

принципе) записываемо в виде цепочки *элементарных операций*, напоминающей систему команд, отдаваемых электронной вычислительной машине.

Например, задача о построении середины отрезка AB решается следующей «программой» (см. рис. 1):

1. *Циркулем построить окружность* ω_1 *с центром* A *и радиусом* $|AB|$.
2. *Циркулем построить окружность* ω_2 *с центром* B *и радиусом* $|BA|$.
3. *Отметить точки пересечения* M_1 *и* M_2 *окружностей* ω_1 *и* ω_2.
4. *По линейке провести прямую* $M_1 M_2$.
5. *Отметить точку* X *пересечения прямых* $M_1 M_2$ *и* AB.

Еще один пример: построение биссектрисы заданного угла AOB (рис. 2). Соответствующая система команд имеет вид:

1. *Циркулем построить окружность* ω_1 *с центром* O *и любым радиусом* R.

2, 3. *Отметить точки пересечения этой окружности:* A_1— *с прямой* OA, B_1— *с прямой* OB.

4, 5. *Циркулем построить окружности* ω_2, ω_3 *с центрами* A_1, B_1 *и радиусом* R.

6. *Отметить точку пересечения* C *окружностей* ω_2 *и* ω_3.

7. *По линейке провести прямую* OC.

Однако в этом случае в пунктах 2 и 3 программа сформулирована неточно. В самом деле, окружность ω_1 имеет с прямыми OA и OB по д в е точки пересечения, и неясно, какие из этих точек нужно обозначить через A_1 и B_1. Вы можете возразить, что речь идет о л у ч а х OA и OB, которые пересекаются с окружностью в единственной точке, но понятие «луч» выходит за рамки понимания нашей «математической машины». Ей доступно только понятие «прямая».

Посмотрим, что получится, если понимать выражение «точка пересечения» как «какая-нибудь точка пересечения». Тогда нашей программе будет соответствовать рисунок 3: вместо точек A_1 и B_1 мы берем по две точки: A_1', A_1'' и B_1' и B_1''. И теперь одной точке C соответствует ч е т ы р е разных точки C', C'', C''' и C^{IV}. Это, однако, приводит всего лишь к д в у м разным ответам: прямые OC' и OC''' совпадают, так же, как и прямые OC'' и OC^{IV}.

К скольким же разным ответам может привести одна и та же программа, решающая задачу на построение? Любая такая программа состоит из элементарных операций. Их всего пять: проведение прямой через две данные точки; проведение окружности с данным центром и данным радиусом; пересечение двух данных прямых; прямой и окружности; двух данных окружностей. Первые три операции однозначны, две последние содержат двузначную неопределенность *).

Если в программу входят лишь однозначные операции, то мы получаем только один ответ. Если в ней

*) Окружность и прямая, так же как и две окружности, могут совсем не пересекаться или касаться друг друга. Эти случаи также могут быть включены в общую схему, но сейчас мы предпочитаем не говорить об этом.

есть одна двузначная операция, то выполнение этой операции приводит к двум реализациям (как в разобранном выше примере). Вообще, если в программе есть k двузначных операций, то эту программу можно реализовать 2^k способами.

Мы видели, что некоторые неопределенности могут в конце концов «сокращаться» и не влиять на окончательный ответ. Оказывается (это можно строго доказать, но не в этом цель настоящей статьи), такие сокращения всегда происходят согласованным образом, так что неопределенность в окончательном ответе всегда имеет вид 2^l ($l \leqslant k$). Этот факт имеет не геометрическую, а алгебраическую природу (соответствующая часть алгебры называется теорией Галуа). Очень поучительно проверить самостоятельно справедливость этого утверждения на примере какой-нибудь конкретной задачи на построение. Мы рекомендуем вам разобрать с этой точки зрения задачу о построении общей касательной к двум окружностям.

Для решения этой задачи можно воспользоваться, например, следующей программой (мы для краткости указываем общую схему и не разбиваем «команды» на элементарные операции).

1. *По линейке провести прямую* O_1O_2, *соединяющую центры* O_1 *и* O_2 *данных окружностей* ω_1 *и* ω_2, *и найти точки* A_1 *и* A_2 *пересечения окружностей* ω_1 *и* ω_2 *с этой прямой* (рис. 4).

2. *Из точки* A_1 *циркулем построить окружность* ω_3 *радиуса* $|O_2A_2|$ *и отметить точку B пересечения окружности* ω_3 *с прямой* O_1O_2.

3. *Циркулем построить окружность* ω_4 *с центром* O_1 *и радиусом* $|O_1B|$.

4. *Циркулем на отрезке* O_1O_2 *как на диаметре построить окружность* ω_5.

5. *Отметить точку C пересечения окружностей* ω_4 *и* ω_5 *и по линейке соединить точку C с точкой* O_1.

6. *Найти точку D пересечения прямой* O_1C *с окружностью* ω_1 *и через полученную точку D провести перпендикуляр к* O_1C.

Этот перпендикуляр и есть искомая касательная.

Вернемся к задаче о построении биссектрисы. Наша программа, кроме биссектрисы угла AOB, дает также и биссектрису в н е ш н е г о угла AOB_1'' (рис. 3). Это решение не надо рассматривать как «постороннее». С точки зрения циркуля и линейки, «понимающих» угол только как пару пересекающихся прямых, этот угол ничем не хуже исходного угла AOB. Попробовав определить понятие биссектрисы в терминах, «доступных» циркулю и линейке, мы увидим, что биссектриса внешнего угла будет удовлетворять этому определению так же, как и биссектриса внутреннего угла.

Это обстоятельство имеет общий характер: все 2^l решений, доставляемых программой, содержащей неопределенности, являются «настоящими», а не посторонними решениями, если только п р а в и л ь н о с ф о р м у л и р о в а т ь з а д а ч у.

Например, задача: *вписать окружность в данный треугольник* — решается программой с неопределенностью 16 (нужно построить биссектрисы двух углов), и приводит к ч е т ы р е м разным ответам (одна впи-

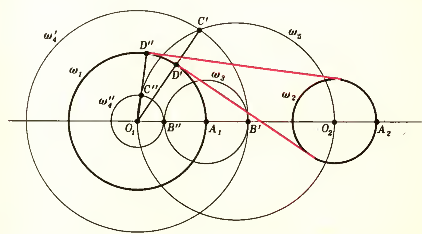


Рис. 4.

санная и три вневписанные окружности), причем все эти ответы равноправны, если сформулировать задачу так: *построить окружность, касающуюся трех данных прямых.* Отличие вписанной окружности от вневписанных основано на понятии «между» (или «внутри») и недоступно пониманию нашей машины.

Разобранные примеры показывают также, что если задача на построение имеет несколько решений, то программа построения дает все эти решения. Это утверждение также справедливо в общем случае.

Поучительный пример: геометрическое построение одного из корней квадратного уравнения автоматически приводит к построению и второго корня.

Таким образом, мы приходим к следующему принципу.

Всякая задача на построение, разрешимая с помощью циркуля и линейки, имеет 2^l решений.

Строгое доказательство этого утверждения дается теорией Галуа и не может быть изложено в этой статье. Однако само утверждение выглядит очень просто и вполне могло бы быть открыто математиками древности. Возникает вопрос, почему же это открытие было сделано лишь в прошлом веке, хотя многие подтверждающие примеры известны уже несколько тысячелетий? (Например, упоминавшаяся выше задача Аполлония имеет 8 решений.)

Одна из возможных причин — отсутствие современной, «машинной» постановки задачи. Другая причина — рассмотрение каждой задачи в отдельности вместо целых серий однотипных задач (вроде задач на построение правильного n-угольника для каждого n).

Возможно, эта тема привлечет внимание историков математики, и они полнее объяснят нам причину этой «упущенной возможности».

4. Правильные многоугольники

Вернемся к нашей основной задаче. Мы хотим знать, когда с помощью циркуля и линейки можно построить правильный n-угольник. Рассуждение предыдущего параграфа наводят на мысль — посмотреть, сколько решений имеет эта задача. Чтобы получить разумный ответ, нужно уточнить постановку задачи. А именно, нужно

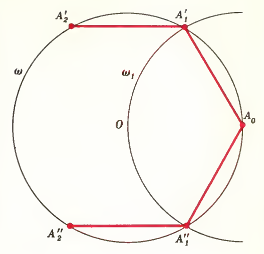


Рис. 5.

фиксировать *размер* и *положение* правильного n-угольника (иначе, разумеется, число решений будет бесконечно, при условии, что есть хотя бы одно решение). Итак, будем считать, что наш n-угольник вписан в данную окружность ω с центром O, и фиксировано положение A_0 одной его вершины. Требуется определить положения $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ остальных вершин. Разумеется, достаточно найти положение точки A_1 — откладывая последовательно дугу A_0A_1, мы получим точки A_2, A_3, A_4 и т. д.

Проще всего эта задача решается при $n = 6$. Известно, что сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу данной окружности. Поэтому нужная «программа» выглядит так (рис. 5):

1. *Циркулем построить из точки A_0 окружность ω_1 радиуса $|OA_0|$.*
2. *Отметить точку A_1 пересечения окружностей ω и ω_1.*

Мы видим, что эта программа приводит к двум разным ответам, но соответствующие шестиугольники $A_0A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ и $A_0A_1''A_2''A_3''A_4''A_5''$ отличаются лишь порядком нумерации вершин.

Такая же ситуация наблюдается в случаях $n = 3$ и $n = 4$. Более интересны случаи $n = 5$ и $n = 10$. Способ построения правильного пятиугольника описан в статье А. Савина «Как нарисовать пятиконечную звезду» («Квант», 1976, № 1). Мы разберем здесь случай $n = 10$.

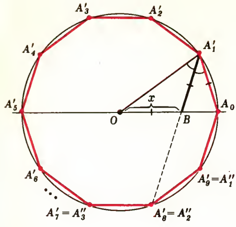


Рис. 6.

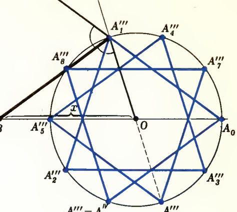


Рис. 7.

Если провести биссектрису A_1B угла OA_1A_0, то образовавшиеся треугольники OA_1B, BA_1A_0 будут равнобедренными (рис. 6), а треугольники OA_1A_0 и BA_1A_0 — подобными. Будем считать прямую OA_0 числовой осью, на которой точка O соответствует нулю, а точка A_0 — единице. Пусть точка B соответствует числу x. Тогда мы получаем уравнение:

$$\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x} \text{ или } x^2+x-1=0.$$

Решив это уравнение, мы найдем точку B. Искомая точка A_1 найдется как точка пересечения данной окружности ω с окружностью с центром в точке A_0 и радиусом длины x. Таких точек две — и мы получаем два решения: точки A'_1 и A''_1 (рис. 6).

Но у нашего квадратного уравнения два корня: $x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ и $x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$. Второй корень отрицателен и по этой причине вроде бы не годится. Однако не будем спешить «отбрасывать» этот корень, а попробуем понять его геометрический смысл.

Восстановим рисунок 6, считая, что точка B находится не справа, а с л е в а от точки O. Мы получим рисунок 7. Это дает для искомой точки A_1 еще два возможных положения: A'''_1 и A^{IV}_1.

Итак, мы пришли к четырем различным возможностям для точки A_1. В результате получаются два разных десятиугольника: *выпуклый* и *звездчатый*, причем на каждом из них возможны две разные нумерации вершин (см. рисунки 6 и 7).

Заметим, что с «точки зрения» циркуля и линейки звездчатый десятиугольник ничем не хуже выпуклого.

Возможно возражение: у выпуклого многоугольника несмежные стороны не пересекаются, а у звездчатого — пересекаются. Но это возражение отпадает, если мы стороной будем называть не отрезок между двумя вершинами (понятия «между» у нас нет!), а всю прямую. Тогда правильный чертеж «выпуклого» десятиугольника будет иметь вид, лишь размером отличающийся от «звездчатого» (рис. 8).

Аналогичная ситуация возникает в случае пятиугольников. Здесь тоже имеется 4 решения, приводящих к двум различным пятиугольникам (рис. 9, *а*, *б*) с двумя различными нумерациями вершин на каждом.

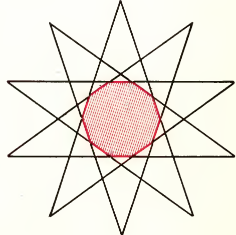
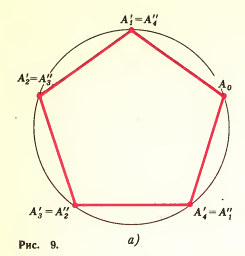


Рис. 8.



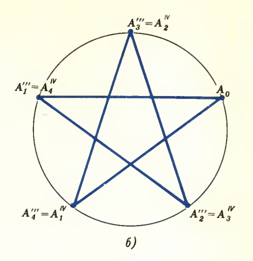


Рис. 9. *а)* *б)*

Теперь, не решая явно задачи на построение произвольного правильного n-угольника, попробуем установить, сколько у нее различных решений. (Напомним, что мы считаем заданными окружность ω и точку A_0 на ней.) Обозначим через x длину дуги A_0A_1. Точка A_1 является решением задачи (с точки зрения циркуля), если, откладывая дугу длины x от точки A_0 последовательно n раз, мы вернемся в исходную точку A_0, а откладывая меньшее число раз — не вернемся.

Последняя оговорка существенна. Иначе в случае, например, $n=6$ нам пришлось бы назвать «правильным вписанным шестиугольником» дважды пройденный треугольник, или трижды пройденный диаметр, или даже шесть раз повторенную точку A_0.

На языке арифметики, принимая длину всей окружности за единицу, наше условие можно сформулировать так: *число* nx — *целое, а числа* x, $2x$, $3x$, ..., $(n-1)x$ — *не целые*. Если $n=10$, то в качестве x можно взять, например, $1/10$. Но это не единственный возможный выбор. Можно взять x также равным $3/10$, $7/10$ или $9/10$. Это соответствует тем четырем решениям, которые мы раньше нашли геометрическим способом. Заметим, что если взять в качестве x число $11/10$ (или $13/10$, $17/10$, ...), то новых геометрических решений мы не получим: положение точки на окружности зависит не от самого числа $x=\frac{k}{n}$, а от остатка, который дает k при делении на n.

Ясно, что несократимые дроби $\frac{m}{n}(m<n)$ и только они обладают тем свойством, что $k\cdot\frac{m}{n}$ попадает в целое число (в начальную точку окружности) лишь при $k=n$. Таким образом, каждое число, меньшее n и взаимно простое с ним, дает решение задачи о правильном n-угольнике, и мы получаем, что число различных решений этой задачи дается функцией Эйлера (см. п. 2)! В частности,

$$\varphi(3)=\varphi(4)=\varphi(6)=2,$$
$$\varphi(5)=\varphi(10)=4,$$

что согласуется с результатами, полученными выше геометрическим путем.

Вспомнив теперь, что всякая разрешимая задача на построение с помощью циркуля и линейки должна иметь 2^l различных решений (см. п. 3), мы получим удобное н е о б х о д и м о е условие для разрешимости задачи построения правильного n-угольника.

Правильный n-угольник допускает построение циркулем и линейкой только тогда, когда $\varphi(n)=2^l$ для некоторого целого l.

(Например, правильный семиугольник построить невозможно, так как число $\varphi(7)=6$ не является степенью двойки.)

Необходимость этого условия мы постарались объяснить. То, что оно является также и достаточным,— от-

дельный результат, и здесь мы им заниматься не будем.

5. Числа Ферма

Однако полученный результат не исчерпывает полностью поставленную задачу. Остается невыясненным вопрос — а много ли вообще таких чисел n, для которых $\varphi(n)=2^l$, то есть много ли вообще «красных» чисел?

Разумеется, про каждое отдельное число мы можем довольно быстро сказать, красное оно или черное — достаточно вычислить $\varphi(n)$. Но это не дает наглядного описания всей совокупности красных чисел. Оказывается, поиск такого описания приводит к трудной и до сих пор не решенной проблеме из теории чисел. Расскажем кратко, в чем суть этой проблемы.

Разложим n на простые множители:

$$n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k},$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа, и посчитаем $\varphi(n)$. Из свойств функции Эйлера (1) и (2) (см. п. 2) мы получаем:

$$\varphi(n)=\varphi(p_1^{m_1})\cdot\varphi(p_2^{m_2})\cdot\ldots\cdot\varphi(p_k^{m_k})=$$

$$=p_1^{m_1-1}\cdot p_2^{m_2-1}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k-1}\times$$

$$\times(p_1-1)\ (p_2-1)\ldots(p_k-1).$$

Чтобы правая часть последнего выражения была степенью двойки, нужно, чтобы каждый нечетный простой множитель p_i входил в него с показателем $m_i=1$; при этом само число p_i обязано иметь вид $p_i=2^l+1$. С другой стороны, выражение 2^l+1 может быть простым лишь тогда, когда l — степень двойки (если l делится на нечетное число $m>1$, то 2^l+1 делится на $2^{l/m}+1$). Итак, каждый нечетный множитель $p_i=2^{2^k}+1$.

Числа вида $2^{2^k}+1$ получили название *чисел Ферма*. Первые пять чисел Ферма (при $k=0$, 1, 2, 3, 4): 3, 5, 17, 257, 65537 — действительно оказались простыми. Как обнаружил Эйлер, шестое число Ферма $2^{2^5}+1$ делится на 641.

Со времен Эйлера числами Ферма интересовались математики разных стран. В частности, почти ровно сто лет тому назад, в 1878 году, на заседании Петербургской академии наук слушалось сообщение Е. И. Золотарева о работе, представленной в академию священником Иоанном Первушиным. В этой работе устанавливалось, что число $2^{2^{23}}+1$ делится на $167\ 722\ 161=5\cdot 2^{25}+1$.

В последнее время многие числа Ферма исследованы на быстродействующих вычислительных машинах. Среди них обнаружены как простые, так и составные. Однако до сих пор не известно, конечно или бесконечно количество простых чисел Ферма. Поэтому мы вынуждены сформулировать ответ на нашу задачу в следующей, еще не окончательной форме:

Правильный n-угольник допускает построение циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $n=2^s\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$, *где* p_i — *попарно различные простые числа Ферма.*

Возможно, кто-нибудь из читателей этой статьи внесет свой вклад в окончательное решение этой очень интересной и трудной задачи.

«Квадратное уравнение»



Предложите своему товарищу написать два члена полного квадратного уравнения. Допустим, что ваше предложение принято и на листе бумаги появилось:

$$97x^2-217x\ \ldots=0.$$

Тогда вы моментально дописываете третий член и сообщаете корни уравнения:

$$97x^2-217x+120=0,$$
$$x_1=1,\ x_2=1^{23}/_{97}.$$

Если же ваш товарищ напишет другие два члена:

$$839x^2\ \ldots\ -391=0,$$

то вы немедленно «решаете» такое уравнение:

$$839x^2-448x-391=0$$

и пишете его корни:

$$x_1=1,\ x_2=-391/839.$$

Ну а если вам напишут

$$\ldots-978x+39=0,$$

то вы быстро дописываете первый член и сообщаете корни уравнения:

$$939x^2-978x+39=0,$$
$$x_1=1,\ x_2=13/313.$$

Внимательно рассмотрев корни написанных здесь уравнений, найдите теорему, на которой основан этот фокус, и научитесь показывать его сами.

А. Пресман

А. Митрофанов

Качающаяся скала



«...Надо сказать, что в этих местах не редкость встретить так называемую «качающуюся скалу» — весьма любопытное явление, суть которого в том, что отдельный кусок скалы в незапамятные времена получает устойчивость равновесия. Он обыкновенно стоит на каменной площадке и, если его раскачивать, он, подобно ваньке-встаньке, принимает первоначальное положение. Такие скалы весят иногда тысячи тонн, но послушны движению руки человека средней силы. Такая скала упасть не может, если, конечно, ее не взорвут ...»

Это — строки из рассказа Александра Грина «Качающаяся скала» — грустной истории о бедном охотнике, которому предложили за три миллиона опрокинуть огромный столб, качающийся около положения равновесия. Охотник, несмотря на все свои усилия, не справился с задачей и сошел с ума (но так и не оставил своей затеи и все пытался столкнуть камень).

Попробуем понять, почему же устойчива «качающаяся скала».

Мы знаем, что для того чтобы тело находилось в положении равновесия, должны выполняться два условия:

векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю; (*)

алгебраическая сумма моментов всех сил относительно произвольной точки равна нулю. (**)

Не всякое положение равновесия является устойчивым. Например, иголка, на которую действует только сила тяжести и реакция опоры, не стоит свободно на гладком столе, хотя, если иголку поставить строго вертикально, условия (*) и (**) будут выполняться. Но при малейшем отклонении иголки от вертикали возникают моменты сил, опрокидывающие иголку. В то же время кирпич стоит устойчиво на любой грани. И как бы мы ни уменьшали кирпич, сохраняя его форму, он по-прежнему будет устойчиво стоять на столе. Но тот же кирпич очень трудно «уравновесить», например, на футбольном мяче (мяч при этом будем удерживать неподвижным).

Из сказанного можно сделать вывод, что от формы тела (точнее, его основания) и поверхности опоры зависит устойчивость равновесия тела. Чтобы вывести критерий устойчивости, обратимся снова к качающейся скале и рассмотрим случай, когда камень и опора в области соприкосновения имеют сферическую форму. Будем предполагать, что камень и глыба, на которой он стоит, сточились или обветрились и стали гладкими, без сколов и выступов, так что область контакта камня с опорой мала и может быть принята за точку. На рисунке 1 показано сечение камня и опоры вертикальной плоскостью, проходящей через точку их соприкосновения (точка C). O и O' — центры сферических поверхностей камня и опоры в области контакта, r и R — соответствующие радиусы.

Для равновесия камня необходимо прежде всего, чтобы центр тяжести (точка P) лежал на вертикали OO'. При этом условия (*) и (**) выполняются. Посмотрим, к чему приведет небольшое отклонение камня от первоначального положения.

Пусть в результате отклонения положение камня на опоре стало таким, как на рисунке 2. Если при этом центр тяжести камня окажется правее вертикали AA', то момент силы тяжести относительно точки опоры A будет способствовать дальнейшему отклонению, и камень уже не вернется в первоначальное положение. Если же точка P окажется левее вертикали AA', то момент силы тяжести относительно точки A будет возвращать камень в первоначальное положение. А это значит, что равновесие камня устойчиво.

Итак, если $CP < CQ$ (см. рис. 2), то равновесие устойчиво. Посмотрим, как при этом связаны между собой CP R и r. В треугольнике OAQ

$\angle OAQ = \alpha$, $\angle AOQ = \beta = \frac{\overset{\frown}{CA}}{r} = \frac{\overset{\frown}{C'A}}{r} = $

$= \alpha \frac{R}{r}$ (так как α мало). По теореме синусов имеем:

$$\frac{OQ}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin[\pi - (\alpha + \beta)]} = \frac{r}{\sin\left(\alpha + \alpha \frac{R}{r}\right)}. \quad (1)$$

Нас интересуют малые отклонения камня от положения равновесия. Говоря «малое отклонение», мы имеем в виду, что расстояние, «проходимое» точкой контакта на поверхности опоры, т. е. дуга $\overset{\frown}{C'A}$ (и, следовательно, дуга $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{C'A}$), мало по сравнению с радиусами r и R поверхностей камня и опоры. А это и означает, что углы α и β малы, т. е. $\alpha \ll 1$ и $\beta = \alpha \frac{R}{r} \ll 1$.

Для малых углов, как известно, синус угла с хорошей точностью равен самому углу. Поэтому выражение

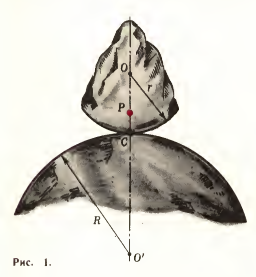


Рис. 1.

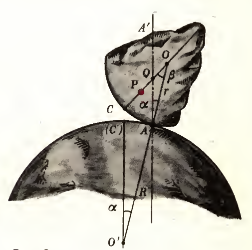


Рис. 2.

(1) можно записать так:

$$\frac{OQ}{r} = \frac{1}{1 + \frac{R}{r}}.$$

Отсюда $OQ = \frac{r^2}{R + r}$. Так как $CQ = r - OQ = \frac{Rr}{R + r}$, то условие устойчивого равновесия камня (т. е. условие $CP < CQ$) записывается в виде неравенства

$$CP < \frac{Rr}{R + r}. \qquad (2)$$

Если поверхность имеет вогнутую форму с радиусом R (форму внутренней поверхности сферы радиуса R), то условие устойчивого равновесия камня на опоре выглядит так:

$$CP < \frac{Rr}{R - r}$$

(CP — по-прежнему расстояние от точки контакта до центра тяжести в положении равновесия). Попробуйте вывести эту формулу самостоятельно.

Отметим теперь следующее важное обстоятельство. Допустим, что равновесие камня на опоре устойчивое. При отклонении камня от положения равновесия возникает момент силы, препятствующий этому отклонению: у силы тяжести относительно новой точки опоры появляется плечо (см. рис. 2). Чтобы удержать камень в новом положении неподвижным, требуется приложить внешнюю силу такую, чтобы ее момент относительно новой точки опоры был равен по величине и противоположен по направлению моменту силы тяжести. (Величина и направление этой силы определяются условием (*).) Значит, даже для небольшого отклонения тела от положения устойчивого равновесия необходимо совершить работу против силы тяжести. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии тела. А это означает, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия тела имеет минимальное значение, или, что то же самое, центр тяжести тела занимает наинизшее положение. Поэтому условие (2) можно вывести иначе, посмотрев, что происходит с центром тяжести камня при его небольшом отклонении (см. упражнение 1). Такие два различных подхода к решению проблемы устойчивости по существу полностью эквивалентны.

Если камень слегка отклонить от положения устойчивого равновесия и не удерживать его в новом положении, то он начнет возвращаться назад, «проскочит» (по инерции) положение равновесия, снова вернется к нему и т. д. То есть камень будет совершать колебания около положения устойчивого равновесия.

Если небольшое отклонение тела от положения равновесия приводит к тому, что центр тяжести его опускается, то равновесие тела неустойчиво. При малейшем отклонении возникает момент силы тяжести, направленный в сторону отклонения и стремящийся его увеличить, и тело «опрокидывается».

Бывают случаи, когда отклонение тела от положения равновесия не изменяет высоту центра тяжести тела над точкой опоры. Такое положение называют безразличным равновесием. В безразличном равновесии находится, например, однородный шарик на горизонтальной плоскости.

Теперь нам понятно, что такое «качающаяся скала»: это вертикально стоящий камень с низко расположенным центром тяжести или большим радиусом кривизны основания. Отклонение камня (правда, в некоторых пределах; см. упражнение 2) приводит к его колебаниям около положения равновесия. Качающаяся скала — это камень-маятник.

Конечно, нелегко рукой «средней силы» расшатать огромный каменный столб. Дело не только в том, что у качающейся скалы большая масса и для того, чтобы сообщить ей ускорение, нужно приложить очень большую силу. Из-за деформации опоры под действием веса камня могут возникать силы реакции, препятствующие отклонению скалы от вертикали. И тем не менее, качающиеся скалы существуют в природе. Может быть, и вы среди каменных валунов встречали нечто подобное?

В заключение рассмотрим примеры, которые не требуют путешествия в горы, их можно изучить и на столе, но по своей природе они такие же, как качающаяся скала.

Пример 1. У однородного шара центр тяжести совпадает с геометрическим центром. Поэтому шар неустойчив на выпуклой поверхности. Однако, если у шара срезана «верхушка», то он может стоять устойчиво на вершине выпуклой поверхности (см. упражнение 3).

Пример 2. Забавная детская игрушка «ванька-встанька» напоминает пример 1. Кусок свинца или стали, спрятанный у шарообразного основания ваньки-встаньки, придает игрушке удивительную устойчивость.

А все ли знают, что у ваньки-встаньки были (а может быть, есть кое-где и сейчас) родственники? Послушайте.

«Было когда-то на свете двадцать пять оловянных солдатиков. Все они были сыновьями одной матери — старой оловянной ложки — и, значит, приходились друг другу родными братьями. Они были очень красивы: ружье на плече, грудь колесом, мундир красный с синим. Чудо, что за солдатики...» Это стойкие оловянные солдатики из сказки Андерсена. Почему их называли стойкими? Наверное, потому, что, как бы их ни наклоняли, они всегда возвращались в вертикальное положение. Когда открывали коробку, в которой были уложены такие солдатики, все они вскакивали, словно по команде. Каждый солдатик крепился на гладком срезе свинцовой полусферы и стоял удивительно устойчиво.

Пример 3. Существует легенда, что Королевский совет, проверяя находчивость и хитроумие Колумба, предложил ему поставить яйцо острым концом на стол. Колумб решил задачу в два счета; он надбил его и установил на столе. При этом он не только изменил форму поверхности в месте контакта, сделав ее похожей на плоскость, но и понизил центр тяжести яйца.

Упражнения

1. Выведите условие (2), используя тот факт, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия тела минимальна.

2. Ванька-встанька стоит на неподвижном шаре. Радиусы шара и основания ваньки-встаньки одинаковы и равны R. Максимальный угол, на который можно отклонить от вертикали игрушку так, чтобы она не упала с шара, равен α_0 (проскальзывания нет). Найдите, где расположен центр тяжести ваньки-встаньки.

3. Полушарие радиуса r стоит устойчиво на неподвижном шаре радиуса R, если выполняется условие $r < 0{,}6R$. Где расположен центр тяжести полушария?

Необычное в обычном

Вдумчивый подход к любым явлениям раскрывает неожиданные и красивые их стороны. Вот один пример. Надо возвести число 487 в квадрат? Пожалуйста, пишем:

$$487-250=237,$$
$$(500-487)^2=169.$$

Теперь записываем полученные числа одни за другим:

237 169.

Это и есть 487 в квадрате. Неожиданно? Красиво? Может быть, случайно? Посмотрим предыдущее число:

$$486-250=236,$$
$$(500-486)^2=196,$$
$$486^2=236196.$$

Опять верно. Следующее число 488, для него

$$488-250=238,$$
$$(500-488)^2=144,$$
$$488^2=238144.$$

Весьма интересные квадраты, не правда ли? Стоит немного исследовать свойства этих чисел. И тогда вы, наверное, возводя 46 в квадрат, не станете перемножать 46×46 и не станете расписывать $(40+6)^2$ как квадрат суммы, а сразу напишете ответ:

$$2100+16=2116.$$

Не так ли?

В. Заварин



А. Футер

Сигналы, графы и короли на торе

Наутро телефон как зазвонит! Я вскочил неодетый, схватил трубку и кричу:
— Слушаю!
А из трубки в ответ:
— Ты чего хрюкаешь?
— Как это — хрюкаю? Я не хрюкаю, — говорю я.
— Брось хрюкать! Говори по-человечески! — кричит Мишка.
— Я и говорю по-человечески. Зачем хрюкать?
— Ну, довольно тебе баловаться! Все равно я не поверю, что ты поросенка в комнату притащил.

Н. Носов. Телефон

Когда два человека ведут неторопливую беседу, слова каждого из них обычно вполне понятны собеседнику. Переспрашивать, уточнять непонятные слова приходится редко. Если тот же самый разговор вести по телефону, то, в зависимости от качества связи, неясно расслышанные слова встречаются чаще, иногда сильно затрудняя понимание. Если же мы попробуем передавать по телефону не осмысленные слова, а просто последовательность букв, что-нибудь вроде

рптфффскллааaaм...,

то окажется, что некоторые буквы часто перепутываются, например «ф» и «с», «б» и «г» и т. д.

Искажает сигналы практически каждый способ связи, будь то телефон, радио, бинокль. С этим явлением существуют разные способы борьбы, но все они снижают эффективность связи. Например, по телефону можно передавать не отдельные буквы, а связные слова: «б» как «Борис», «г» как «Григорий» и т. п., — но тогда вместо одной буквы нам придется передавать 5—8. Можно повторять каждый сигнал много раз, как передавались, например, на Землю первые фотографии обратной стороны Луны в 1959 году, но это займет во столько же раз больше времени. В этой заметке исследуется один экономный способ борьбы с искажением сигналов при передаче*). Идея этого способа проста: если уж мы знаем, какие сигналы с какими можно спутать, то будем передавать лишь один сигнал из каждой такой группы, а от остальных откажемся. Например, по телефону из звуков «ф», «с», «ш» — только звук «с».

*) Впервые эти вопросы исследовал американский кибернетик (француз по происхождению) Клод Шеннон.

Графы ошибок

Каждое сообщение обычно состоит из отдельных «элементарных» сигналов: слов (в разговоре по телефону), букв (в морской флажковой сигнализации «семафор») или других знаков (точка и тире на телеграфе). Пусть эти элементарные сигналы образуют множество S — *входной алфавит.* Изобразим каждый сигнал из S кружочком и соединим пару кружочков отрезком («ребром»), если соответствующие им сигналы при передаче можно спутать друг с другом. Получится граф *) с множеством вершин S. Назовем его *графом ошибок* нашего передающего аппарата.

Приведем пример. Минутная стрелка электрических часов меняет свое положение скачком: как только кончается очередная минута, стрелка прыгает к следующей. Если эти часы находятся далеко от нас, то мы не можем точно определить положение минутной стрелки. Но пусть мы ошибаемся каждый раз не очень сильно — не более, чем на минуту. Тогда входной алфавит будет содержать 60 элементов — 60 возможных положений минутной стрелки (каждому из них соответствует точка на окружности — границе циферблата), а графом ошибок Γ будет правильный 60-угольник — каждая точка соединена отрезками с двумя соседями.

А теперь попытаемся выяснить, что надо сделать, чтобы можно было безошибочно распознать наибольшее число показаний минутной стрелки. Переделаем часы так, чтобы минутная стрелка прыгала через каждые 2 минуты, то есть чтобы часы показывали лишь четное число минут. Тогда уже никакое видимое нам показание ни с каким другим спутать нельзя — ведь ошибок в 2 минуты или больше мы не допускаем. Таким образом, если договориться, что множество передаваемых сигналов — это только 30 четных

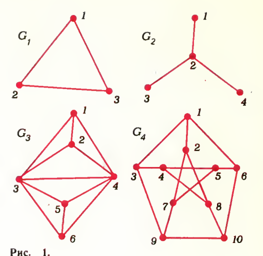


Рис. 1.

чисел от 0 до 58, то все они будут безошибочно определены. С другой стороны, очевидно, что 30 — максимальное значение: если в графе Γ взять 31 вершину или больше, то какие-нибудь две из них обязательно будут соединены (докажите!).

В этом примере мы построили множество M вершин графа, обладающее следующим свойством: *любые две вершины из M не соединены ребром.* Такое множество M называется *независимым множеством* (н. м.). В нашем примере независимы любые наборы четных показаний минутной стрелки, например: {2, 8, 34, 52, 56}, — или набор показаний, делящихся на 5: {0, 5, 10, ..., 55}.

Если н. м. M вершин некоторого графа G содержит наибольшее число вершин среди всех его н. м., то оно называется *наибольшим независимым множеством* (н. н. м.), а число $\alpha(G)$ вершин в нем — *числом независимости* (ч. н.) графа G.

В рассмотренном выше графе Γ много различных н. м., а н. н. м. — всего два (совокупность четных чисел от 0 до 58 и совокупность нечетных чисел от 1 до 59), и $\alpha(\Gamma)=30$.

Если граф G является графом ошибок некоторого передающего аппарата A, то $\alpha(G)$ — это наибольшее число различных сигналов, которые можно передать через этот аппарат без перепутывания. Поэтому $\alpha(G)$ называют еще *пропускной способностью* аппарата A.

*) Напомним, что *графом* называется совокупность точек (вершин графа), некоторые пары которых соединены отрезками (ребрами). Если вершины v и w в графе соединены ребром, они называются *соседними* или *смежными*, обозначается это так: $v \sim w$.

Задача 1. Определить н. н. м. и ч. н. для графов, изображенных на рисунке 1.

Задача 2. На окружности расположены n точек. Каждая из них соединена с $2k$ точками — по k ближайших точек в каждую сторону. Определить ч. н. полученного графа.

Квадрат алфавита

С каждым передающим аппаратом A мы связали входной алфавит S, граф ошибок G и число независимости графа G (пропускная способность аппарата A) $\alpha(G)$. А как быть, если аппарат A задан раз и навсегда, а его пропускная способность для нас недостаточна? Скажем, если A — телеграфный аппарат, передающий только точки и тире, а мы хотим передавать по телеграфу буквы? Выход известен — это азбука Морзе: надо передавать через A пачки из нескольких знаков (точек — тире) и считать каждую такую пачку одним сигналом.

Сначала попробуем передавать через тот же аппарат A по два последовательных сигнала из S. Посмотрим, сколь сильно возрастут теперь наши возможности.

Можно считать, что у нас появился новый передающий аппарат A^2, входной алфавит которого S^2 состоит из двухбуквенных сигналов $(v_1;\ v_2)$, где $v_1 \in S$, $v_2 \in S$ (в дальнейшем мы для удобства элементы любого алфавита будем называть буквами).

Попробуем определить пропускную способность аппарата A^2. Для этого прежде всего надо построить граф его ошибок, обозначаемый через G^2. Посмотрим, при каких условиях сигнал $(v_1;\ v_2)$ можно спутать с сигналом $(w_1;\ w_2)$. Очевидно, для этого должно выполняться одно из следующих трех условий:

а) $v_1 = w_1, \quad v_2 \sim w_2;$
б) $v_1 \sim w_1, \quad v_2 = w_2;$
в) $v_1 \sim w_1, \quad v_2 \sim w_2.$

Таким образом, вершины $(v_1;\ v_2)$ и $(w_1;\ w_2)$ графа G^2 соединены ребром, если в графе G есть ребра $v_1 — w_1$ (или $v_1 = w_1$) и $v_2 — w_2$ (или $v_2 = w_2$). Например, если граф G содержит всего две вершины, соединенные ребром, то G^2 — это квадрат с диагоналями (рис. 2).

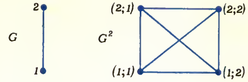


Рис. 2.

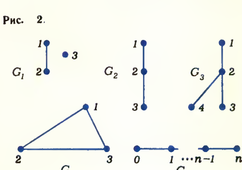


Рис. 3.

Задача 3. Построить граф G^2 для каждого из графов G, изображенных на рисунке 3.

Таким образом, можно считать, что G^2 — это «слоеный» граф: каждый его вертикальный или горизонтальный слой совпадает с G, а каждому ребру $a — b$ графа G соответствует квадрат с диагоналями в графе G^2.

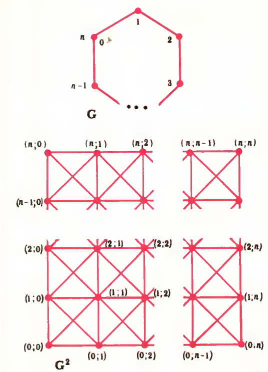
Попробуем найти какое-нибудь независимое множество в графе G^2.

Пусть в графе G множество M независимо. Это означает, что элементы из M при передаче аппаратом A друг с другом не путаются. Тогда при передаче пар букв из M ни одна из этих букв не исказится, поэтому в алфавите S^2 не путаются друг с другом элементы вида $(a;\ b)$, где $a \in M$, $b \in M$. Множество пар $(a;\ b)$, где $a \in M$, $b \in M$, обозначается символом M^2. Легко видеть, что если p — число элементов в M, то число элементов в множестве M^2 равно p^2. Таким образом, пропускная способность аппарата A^2 является как минимум квадратом пропускной способности аппарата A, то есть на языке графов

$$\alpha(G^2) \geqslant (\alpha(G))^2.$$

Заметим, однако, что такое увеличение пропускной способности дается не даром — вдвое падает скорость передачи сигналов.

На самом деле буквы по телеграфу передаются несколько иначе. В принципе для всех 33 букв алфавита необходимы наборы из 6 знаков (пятизнаковых не хватит), но по телеграфу можно передавать не только точ-



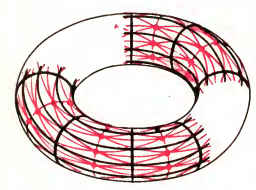


Рис. 4.

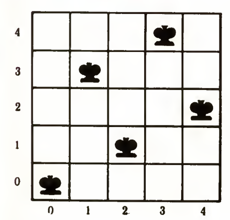


Рис. 5.

ки и тире, но и «пробел» (как увеличенный интервал между сигналами). Поэтому не обязательно использовать для всех букв наборы из 6 знаков — рациональнее за часто используемыми буквами закрепить короткие наборы (точка — за буквой *е*, тире — *т*, точка-тире — *а*), а редко встречающимся буквам оставить длинные наборы (тире-точка-тире-точка — *ц*). Но даже наличие такого специфического сигнала, как «пробел», позволяет наборами не более чем из четырех знаков передавать 31 букву алфавита (наборами из одного знака — две буквы, наборами из двух знаков — еще четыре буквы и т. д.). Так вот, на телеграфе отождествили буквы ь и ъ (тире-точка-точка-тире) и *е*, *ё* (точка), поэтому для всех букв алфавита хватает наборов не более чем из 4 знаков, а более длинные используются для цифр (точка-точка-точка-тире-тире — 3) и знаков препинания (точка-тире-точка-тире-точка-тире — *запятая*).

Короли на торе

Усложним немного граф G_5 рисунка 3: склеим точки 0 и n. Получится n-угольник 012 … (n—1). Обозначим этот граф через P_n. Его квадрат P_n^2 получится из квадрата отрезка, если склеить попарно две горизонтальные и две вертикальные его стороны. Но квадрат отрезка — настоящий квадрат, а если еще склеить его противоположные стороны, то получится тор! А точнее, сетка на торе, содержащая n^2 квадратиков 1×1 с диагоналями (рис. 4).

Если вершины этих квадратиков отождествить с клетками торической шахматной доски размером $n\times n$, то соседние в шахматном смысле поля доски окажутся соединенными отрезками сетки, или, что то же самое, ребрами графа P_n^2, а задача М415 о максимальном числе несоседних королей на торе превратится в задачу определения числа независимости графа P_n^2. Ее решение приведено в этом номере журнала (см. с. 37).

Если вы хотите яснее представить себе структуру н. н. м. графа P_n^2, решите следующие задачи.

Задача 4. Пусть множество M — н. н. м. графа P_n^2 (или, что то же самое, торической шахматной доски $n\times n$). Докажите, что

а) если $n=2s$, то M_1^2, где M_1 — некоторое н. н. м. P_n, является н. н. м., и $\alpha(P_{2s}^2)=s^2$;

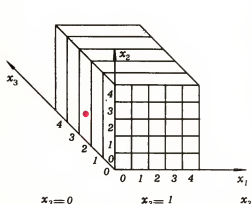
б) если $n=4s+1$, то на каждой вертикали и на каждой горизонтали доски располагаются ровно $s=\left[\frac{n}{4}\right]$ точек (королей) из M (здесь $[a]$— целая часть числа a);

в) если $n=4s+3$, то на каждой вертикали и на каждой горизонтали торической доски располагаются либо s, либо $s+1$ точек из M.

Задача 5. Будем изображать граф P_5^2 (тор) квадратом, помня, что противоположные стороны его склеены. Назовем *циклическим сдвигом* графа P_n^2 отображение «параллельный перенос», при котором элемент $(0;\ 0)$ переходит в $(s;\ t)$.

Докажите, что любое и. н. м. M графа P_5^2 можно привести к виду, изображенному на рисунке 5, если разрешить циклические сдвиги графа доски и симметрии относительно диагонали, вертикали и горизонтали квадрата.

Примечание. Симметрию относительно диагонали $(0;\ 0)$ $(n-1;\ n-1)$ квадрата можно записать формулой $(x;\ y)\to(y;x)$. Циклический сдвиг можно было бы записать так: $(x,\ y)\to(x+s;\ \ y+t)$, но в этой формуле будет одна неточность. Хотелось бы отождествить числа n и 0, $n+1$ и 1 и т. д. Для этого применяются значки $\equiv$ и (mod n). Говорят, что *a сравнимо с b по модулю n* и пишут $a\equiv b$ (mod n), если a и b при делении на n дают равные остатки. Обозначим через a (mod n) остаток от деления a на n. Тогда можно сказать, что элемент $(x;\ y)$ переходит при циклическом сдвиге графа в элемент $((x+s)$ (mod n); $(y+t)$ (mod n)), а при отражении относительно, скажем, прямой $x=c$ — в элемент $(2a-x)$ (mod n); y).



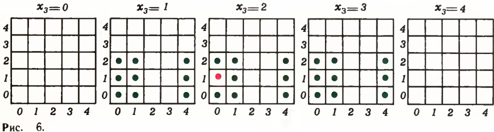


Рис. 6.

Все, что известно

Попробуем дальше усложнить наш передающий аппарат; построим аппарат A^k, где k — некоторое натуральное число. Это значит, что с помощью аппарата A мы будем передавать пачки из k букв, каждая из которых берется из начального входного алфавита S.

По аналогии с двухбуквенными сигналами несложно построить граф G^k ошибок аппарата A^k. Его множество вершин — это алфавит S^k, состоящий из всевозможных наборов букв длины k: $(v_1;\ v_2;\ \ldots;\ v_k)$, где все v_i берутся из алфавита S. Несложно построить и ребра в графе G^k, то есть понять, какие сигналы $(v_1;\ v_2;\ \ldots;\ v_k)$ и $(w_1;\ w_2;\ \ldots,\ w_k)$ могут перепутаться. Для этого должны перепутаться между собой буквы каждой из координат, то есть для каждого i $(1\leqslant i\leqslant k)$ должно выполняться одно из двух условий: либо $v_i=w_i$, либо $v_i\sim w_i$ (если $v_i=w_i$ для каждого i, то данные наборы совпадают).

Определять точное значение пропускной способности аппарата A^k в общем случае довольно сложно, но можно оценить ее снизу.

Задача 6. Докажите, что

$$\alpha(G^k)\geqslant(\alpha(G))^k.$$

А дальше... Даже в одном из самых простых случаев, когда граф ошибок — это n-угольник P_n, об $\alpha(P_n^k)$ известно мало. Все, что известно из литературы, сейчас и будет рассказано.

Торическую шахматную доску размером $n\times n$ называют еще *двумерным тором*. Аналогично k-ю степень n-угольника (граф P_n^k) можно назвать *k-мерным тором* со стороной n. Вер-

n \ k	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	2	4	8	16	32
5	2	5	10	25	
6	3	9	27	81	243
7	3	10	33		
8	4	16	64	256	1024
9	4	18	81		
10	5	25	125	625	3125
11	5	27			
12	6	36	216	1296	7776
13	6	39			
14	7	49	343	2401	16807
15	7	52			

Рис. 7.

шины графа P_n^k можно отождествить с набором из k целых чисел: $(x_1;\ x_2;\ \dots$ $\dots;\ x_k)$, где каждое число x_i изменяется от 0 до $n-1$.

Задача 7. Определите число вершин в графе P_n^k.

Согласно определению, два набора $(x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_k)$ и $(y_1;\ y_2;\ \dots;\ y_k)$ смежны в графе P_n^k, если в n-угольнике каждая пара координат x_i, y_i — соседи, то есть для каждого i значения i-той координаты различаются не более, чем на единицу: $|x_i - y_i| \equiv$ $\equiv h_i \pmod n \in \{0,\ 1\}$ для всех i от 1 до k (например, на рисунке 6 для случая $k = 3$, $n = 5$ отмечены соседи набора (0; 1; 2)).

Задача 8. Определите число соседей каждой вершины k-мерного тора.

Задача 9. Докажите, что

$$\alpha(P_n^k) \leqslant \left[\left(\frac{n}{2}\right)^k\right].$$

Задача 10. Определите $\alpha(P_n^k)$, если n — четное.

Для нечетных n справедлива оценка

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^k \leqslant \alpha(P_n^k) \leqslant \left[\left(\frac{n}{2}\right)^k\right],$$

а иногда известно и точное значение $\alpha(P_n^k)$.

Теорема. *Если $n-1$ делится на 2^k, то*

$$\alpha(P_n^k) = \frac{n-1}{2^k}\cdot n^{k-1}.$$

Полное доказательство этой теоремы довольно длинно, поэтому покажем лишь, как определить независимое множество с таким числом элементов. По каждому набору $(x_1;\ x_2;\dots$ $\dots;\ x_{k-1})$ первых $k-1$ координат получим $r = \dfrac{n-1}{2^k}$ значений k-той координаты:

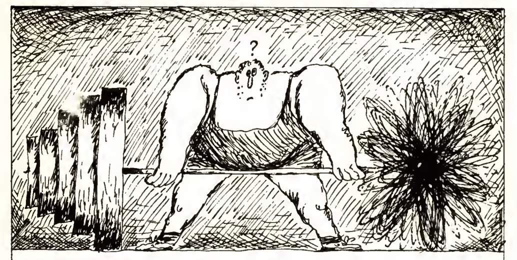
$$x_k \equiv 2l + r(2^{k-1}x_1 + 2^{k-2}x_2 + \dots + 2^1 x_{k-1}) \pmod n.$$

Здесь l — любое целое число от 0 до $r-1$.

Если для случая $k=2$ вы изобразите множество вершин, координаты которых заданы последней формулой, то получится ответ задачи М415 при $n-1$, делящемся на 4.

Эти результаты позволяют построить таблицу значений $\alpha(P_n^k)$ (рис. 7). В ней часть чисел получена теоретически, а остальные — при помощи вычислительной машины. Вы видите, что с ростом k и n доля незаполненных мест становится все весомее.

Может быть, кто-то из вас заполнит пропуски в этой таблице и решит задачу об определении пропускной способности передающих аппаратов?



Я. Смородинский

Масса атома и число Авогадро

Масса тела определяется взвешиванием — сравнением с массой гирь. Масса гири определяется сравнением со специальным эталоном. Этот эталон сравнивается с другим, более точным. В конце концов цепочка сравнений заканчивается сравнением с главным эталоном, массу которого весь мир условился считать равной одному килограмму. Когда-то думали, что удобно определить килограмм как массу одного литра воды при 4°С. Казалось бы, при таком определении каждая лаборатория сможет иметь свой эталон. К сожалению, на практике так не получилось. Ведь задача состоит в том, чтобы сделать точный эталон, а отмерить точно 1 литр воды не просто. Но даже если сделать это достаточно точно, все равно нельзя быть уверенным, что отмерен литр «эталонной» воды — ведь масса воды различна в зависимости от количества растворенного в ней воздуха, примесей всяких солей. Наконец, и температуру 4°С точно выдержать нелегко. С таким «водяным» эталоном вряд ли можно задать массу в 1 *кг* с относительной ошибкой меньшей, чем 0,1%, или, в лучшем случае, 0,01%. Поэтому «водяной» эталон массы продержался сравнительно недолго и был заменен.

В качестве эталона массы в 1 *кг* была принята масса специально изготовленного образца из сплава платины и иридия. Копию этого эталона, хранящегося в Севре, можно изготовить из хорошего сплава с большой точностью. Массы современных копий отличаются от эталонной не более чем на 10^{-8} *кг*, то есть с относительной ошибкой, не превышающей 10^{-6}%. Поэтому сейчас и определяют массу в 1 *кг* с помощью одного-единственного эталона, созданного руками человека.

Есть другой путь определения массы — через единицу массы, которой пользуются в химии и молекулярной физике. Масса атома или молекулы определяется сравнением с 1/12 массы атома изотопа углерода ^{12}C. Отношение массы атома или молекулы к 1/12 массы атома ^{12}C, как известно, называют относительной атомной или молекулярной массой. Преимущество такого определения очевидно: эталон массы можно создать в любой лаборатории, так как массы атомов ^{12}C абсолютно одинаковы. Отношение же масс разных атомов можно определять с большой точностью. Это делают с помощью масс-спектрометра.

1/12 массы атома ^{12}C называют атомной единицей массы (а. е. м.).

Точность измерения в а. е. м. очень высока. Так, относительная масса водорода по современным измерениям равна

$$\mu_H = 1{,}007825036\ (11)\ а.\ е.\ м.$$

Число в скобках (11) означает, что указанная величина известна с такой точностью, что в последних двух знаках возможна ошибка примерно в 11 единиц. Иначе говоря, последние две цифры могут быть на самом деле и 47, и 25, и любым другим числом, заключенным между ними.

Таким образом, масса в а. е. м. определяется с большей точностью, чем масса в килограммах. Но вот беда: физики не умеют измерять массу макроскопического тела, например, металлической детали непосредственно в а. е. м. В килограммах умеют, а в а. е. м.— нет. Деталь в масс-спектрометр не «запустить», а атом углерода нельзя положить на весы. Значит, надо найти какой-то путь, чтобы измерить массу атома углерода в килограммах, а тогда мы легко будем переводить массу, измеренную в а. е. м., в килограммы и обратно — из килограмма в а. е. м. О том, как была измерена масса атома в килограммах, и притом с большой точностью, мы и расскажем.

Но прежде объясним, как связано со всем сказанным выше число Авогадро. Дело в том, что число Авогадро и 1/12 массы атома ^{12}C связаны. Действительно, число Авогадро — N_A — это, по определению, число частиц в моле вещества. В 1 моле, т. е. в 12 *г* углерода ^{12}C, содержится N_A атомов:

$$N_A = \frac{12\,г/моль}{m_{^{12}C}\ г}.$$

Но $m_{^{12}C}$ (*г*) = 12 *а. е. м.*, так что численное значение величины N_A равно

$$N_A = \frac{1}{\frac{1}{12} m_{^{12}C}}.$$

Таким образом, число Авогадро есть просто обратная величина атомной единицы массы, выраженной в граммах. Можно было бы вообще не вводить N_A, однако во многих формулах по привычке пишут N_A, а поэтому число Авогадро осталось в физике как константа, равная числу частиц в моле вещества.

Измерить N_A — это то же самое, что измерить массу какого-либо атома в граммах — «взвесить» атом. Зная же массу атома, уже нетрудно определить значение атомной единицы массы в граммах (т. е. обратную величину числа Авогадро).

Три года назад в Американском Бюро стандартов — институте, специализирующемся на сверхточных измерениях,— группа физиков провела очень точные измерения числа Авогадро. Эксперименты проводились по такому плану. Сначала измерялся объем V_0 (*см*³), который приходится на один атом в кристалле. Это делается очень точно при помощи рентгеноструктурного анализа образца. Затем измерялась плотность кристалла ρ (*г/см*³). Затем, зная молярную массу μ вещества кристалла и массу атома $m = \rho V_0$, находим число Авогадро

$$N_A = \frac{\mu}{\rho V_0}.$$

При помощи масс-спектрометра с очень высокой степенью точности определяли относительную атомную массу Si. Тем самым, с той же точностью находили молярную массу Si. Это оказалось необходимо в связи с тем, что она незначительно различалась у разных образцов природного кремния.

Далее необходимо было как можно точнее измерить плотность кремния. Для этого надо было очень точно определить массу образца и его объем. Массу определяют достаточно точно путем взвешивания. Чтобы определить объем, поступили примерно так, как когда-то поступил Архимед с короной царя Гиерона.

Образец опустили в тяжелую жидкость (четырехфтористый углерод). Измерив массу вытесненной жидкости $m_ж$ (это можно сделать с большой точностью) и поделив ее на плотность жидкости $\rho_ж$, можно было бы найти объем вытесненной жидкости, т. е. объем образца V. Однако плотность жидкости известна с недостаточно высокой точностью. Чтобы «избавиться» от нее в последующих вычислениях, поступили так. В ту же

жидкость опустили стальной шарик, объем которого был измерен с очень высокой точностью (чего нельзя сделать с кристаллом кремния). Измерив массу вытесненной жидкости $m'_ж$ и поделив ее на объем шарика $V_ш$, нашли $\rho_ж$. Итак, объем образца равен $V = \frac{m_ж}{m'_ж} V_ш$. Поделив массу образца на его объем, нашли плотность кремния ρ.

По результатам всех измерений было найдено число Авогадро. Оно оказалось равным

$$N_A = 6{,}0220941\,(53) \cdot 10^{23}\ \textit{моль}^{-1}.$$

Относительная ошибка вычисленной величины меньше $10^{-6}\%$. Пользуясь этим значением N_A, можно получить с такой же точностью величину массы протона в килограммах: обратная величина N_A есть а. е. м. в килограммах

$$1\ \textit{а. е. м.} = 1{,}6726348\,(15) \cdot 10^{-27}\ \textit{кг};$$

умножив это число на значение относительной атомной массы протона, получим массу протона в килограммах:

$$m_p = 1{,}6326348\,(15) \cdot 10^{-27}\ \textit{кг}.$$

Погрешность в определении N_A относительно мала. Но она еще слишком велика, чтобы можно было определить массу протона в килограммах с точностью, которая позволила бы принять ее за эталон массы. Масса, определяемая эталоном килограмма, пока еще остается намного точнее. Надо уменьшить ошибку в числе Авогадро раз в 50—100 для того, чтобы можно было отказаться от эталона массы, сделанного человеком, и перейти к естественному эталону — протону.

Рогатая сфера Александера

Каждый из вас прекрасно знает, что такое сфера. Представьте себе теперь, что сфера изготовлена из прочной пленки, которую можно растягивать и сжимать, но запрещается склеивать и рвать. Тогда из сферы можно получить поверхности, сильно от нее отличающиеся, например, тетраэдр, куб или цилиндр с днищами. С точки зрения одного из разделов «высшей геометрии» — *топологии* — все эти поверхности одинаковы.

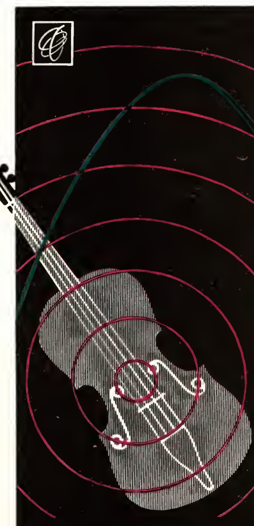
На обложке вы видите одну из таких «одинаковых со сферой» поверхностей (*топологический образ сферы*) — *рогатую сферу Александера*. Из обычной сферы ее можно получить бесконечной итерацией процесса изображенного на рисунке 1. На первом шаге получается конструкция «сцепленные пальцы». Затем эту конструкцию следует повторить на каждой паре зачерненных на рисунке «дисков», снова сцепить «пальцы» (следующего порядка) и т. д.

Рогатая сфера Александера обладает одним удивительным свойством. Если вы рассмотрите обычную сферу и любую окружность, целиком лежащую вне этой сферы или внутри ее, то эту окружность можно стянуть в точку, не пересекая поверхности сферы. Иначе говоря, области, на которые сфера делит пространство, односвязны. Долгое время математики думали, что любой топологический образ сферы делит пространство на две односвязные области (обобщение знаменитой леммы Жордана о том, что произвольная замкнутая несамопересекающаяся линия делит сферу на две односвязные области). Однако в 1924 году американскому математику Дж. У. Александеру удалось построить «рогатую сферу», которая, как и обычная сфера, разбивает пространство на две области A и B («внутренность» и «внешность»), но внешняя область B не односвязна.



Если вы хотите познакомиться с топологией поближе, рекомендуем вам прочитать статью В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича в сборниках «Математическое просвещение» — №№ 2, 3, 4 и 6 (Москва, 1957—1960 г.).

И. К.



В. Майер, Р.-Э. Шафир

Звук и струя

В первом номере нашего журнала за текущий год была напечатана статья этих же авторов «Струйный автогенератор звука». В ней рассказывалось о возможности получения незатухающих звуковых колебаний с помощью водяной струи. Статья заканчивалась такими вопросами: «Действительно ли звуковые волны воздействуют на струю? В чем выражается это воздействие? Каков его механизм?» Проще всего на эти вопросы ответить экспериментально. О том, как это можно сделать, и рассказывается в предлагаемой ниже статье.

Описанные в статье опыты известны уже более ста лет, однако время не наложило на них отпечатка старости. Мы не знаем, предвидели ли ученые, исследовавшие жидкие струи, возможность практического применения обнаруженных ими явлений. Скорее всего нет. Тем не менее, как это всегда и бывает (так уж устроен мир!), восхищаясь красотой и постигая сущность вещей, человек извлекает из этого далекого от повседневности занятия непосредственную пользу. Сейчас жидкие струи широко используются на практике — струйные усилители, генераторы и т. п.

Звуковой генератор

Необходимый для опытов звуковой генератор в наши дни проще всего собрать на транзисторах. Их и другие необходимые детали можно приобрести в любом радиомагазине.

Принципиальная схема звукового генератора приведена на рисунке 1. Собственно генератор собран на транзисторах T_1 и T_2. Такой генератор дает колебания, по форме близкие к прямоугольной, то есть состоящие из множества синусоидальных гармоник. Вот почему его называют мультивибратором (multum — много, vibro — колебание). Частота колебаний, даваемых мультивибратором, определяется емкостями конденсаторов C_1, C_2 и сопротивлениями резисторов R_2, R_3, R_4. Переменный резистор R_3 служит для плавного изменения частоты. На транзисторе T_3 собран усилитель низкой частоты. Нагрузкой транзистора T_3 является первичная обмотка трансформатора Tp, ко вторичной обмотке которого подключен динамик (громкоговоритель) $Гр$.

Звуковой генератор может быть собран, например, так, как показано на рисунке 2. В налаживании этот прибор не нуждается, и, если детали исправны, а прибор собран в соответствии со схемой, генератор начинает работать сразу по включении питания.

Влияние звука на водяную струю

Анализируя работу струйного автогенератора, мы уже говорили о том, что звук должен каким-то образом

влиять на струю. Предлагаем вам выяснить на опыте, так ли это на самом деле.

Стеклянную трубку с отверстием диаметром около 1 *мм* вденьте в конец резинового шланга, другой конец которого опустите в сосуд с водой, расположенный на высоте 0,5—1 *м* над поверхностью стола. Стеклянную трубку укрепите на столе под произвольным углом к горизонту. Потом вытяните из шланга воздух и получите струю.

В опытах со струйным автогенератором мы рекомендовали шланг соединять непосредственно с водопроводным краном. Здесь такой способ получения струи нежелателен потому, что по железным трубам водопровода хорошо распространяются различные звуки и, если они как-то влияют на струю, будут мешать наблюдениям.

Выходящая из отверстия стеклянной трубки струя неоднородна. Вблизи отверстия она сплошная, затем мутнеет и уже в верхней части траектории разбивается на совершенно обособленные капли, которые падают настолько быстро, что создают ощущение целого снопа непрерывных струй (рис. 3, *а*). Теперь рядом со стеклянной трубкой поставьте на стол динамик и подключите его к звуковому генератору. Включите питание и постепенно изменяйте переменным резистором частоту звука. Вы заметите, что при определенной частоте сплошной (прозрачный) участок струи резко сокращается, а сноп струй слипается, образуя одну внешне совершенно непрерывную струю (рис. 3, *б*)! Это настолько удивительно, что все, кто видит описанное явление первый раз, приходят в изумление. Оказывается, водяная струя чрезвычайно чувствительна к звуку. Можно расположить динамик в любом месте стола, отнести его на другой стол — все равно, если частота звука подобрана правильно, струя реагирует на звук. Меняя частоту звука, можно получить из снопа струй и две струи, примерно равные по толщине (рис. 3, *в*), и три струи, и две струи, одна из которых значительно тоньше другой и бьет как-то в сторону (рис. 3, *г*), и т. д.

Если для проведения опытов вы не решились собрать звуковой генератор, его можно заменить любым другим источником звука, частоту которого можно изменять. Самый доступный из них — это ваш голос. Надо только иметь в виду, что звук, на который реагирует струя, должен быть достаточно низким. Лучше всего, если его частота лежит в пределах 200—500 *гц*. Громко кричать струе вовсе не обязательно: она довольно послушна, если вы умеете приказывать струе на понятном ей языке. Другим возможным источником звука является, например, гитара. Прикоснитесь ею к поверхности стола и перебирайте струны. Вы без особого труда подберете звук такой частоты, при котором размазанная струя слипается. Взяв одновременно звуки слегка отличающихся частот, можно получить звуковые биения, и тогда струя будет слипаться в такт с изменениями звука.

Попробуем объяснить, почему же разбрызганная струя слипается под действием звука. Заметим еще раз, что как только струя начинает реаги-

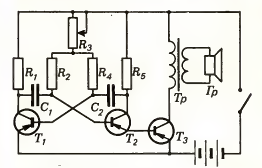


Рис. 1. Принципиальная схема генератора. Параметры схемы: транзисторы T_1 — T_3 типа МП41; динамик *Гр* типа 0,5ГД21; трансформатор *Тр* — выходной от карманного радиоприемника; напряжение питания 4,5—9 *в* (одна или две последовательно соединенные батарейки для карманного фонаря); $R_1 = R_5 = 10$ *ком*, $R_2 = R_4 = 47$ *ком*, $R_3 = 68$ *ком*, $C_1 = C_2 = 0,05$ *мкф*.



Рис. 2. Внешний вид генератора.

ровать на звук (при определенной частоте последнего), прозрачный участок струи уменьшается. Это означает, что процесс образования капель теперь начинается раньше. В чем причина?

В отсутствие звука струя сама распадается на капли, причем капли появляются более или менее упорядоченным образом. Однако в силу случайных обстоятельств капли оказываются немного различными. Каждая из них, обладая своей массой и скоростью, летит по соответствующей траектории, а все движущиеся капли вместе создают впечатление снопа струй. При совпадении частоты звука с частотой естественного образования капель этот процесс образования начинается раньше (сплошная часть струи укорачивается) и происходит почти со строгой периодичностью. Звук как бы отрывает от струи через равные промежутки времени одинаковые капли. Эти капли быстро движутся по одной траектории и производят впечатление одной слипшейся струи.

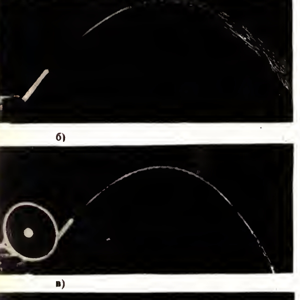
Чтобы проверить правильность этого качественного объяснения, изготовьте простейший стробоскоп.

К валу микроэлектродвигателя припаяйте жестяную насадку диаметром около 30 *мм* и толщиной 0,5—1 *мм*. Двумя болтами с гайками закрепите на этой насадке картонный диск диаметром 150 *мм* с четырьмя симметрично расположенными прорезями. Микроэлектродвигатель соедините с одной (или двумя) батарейками через реостат, изготовленный из грифеля простого карандаша. Передвигая контакт по грифелю (или наоборот), можно менять сопротивление реостата и тем самым регулировать скорость вращения диска стробоскопа.

Получите слипшуюся струю и посмотрите на нее через стробоскоп. Правильно подобрав скорость вра-

а)

б)



в)



г)



Рис. 3. Струи при различных частотах звука.



Рис. 4. Вид слипшейся струи через стробоскоп.

щения диска, вы заметите, что слипшаяся струя на самом деле состоит из отдельных капель, следующих друг за другом через равные промежутки времени (рис. 4). Для улучшения условий наблюдения струю можно сбоку осветить, а за ней расположить темный фон, на который не попадает прямой свет от осветительной лампы.



Ю. Ионин, А. Плоткин

Среднее значение функции

В этой статье понятие среднего арифметического n чисел обобщается на функции, определенные на отрезке, окружности и сфере. Кроме того, в ней решается задача М394 («Квант», 1976, № 7).

1. На конечном множестве

Выступая на классном собрании, Макар Ливанов сказал: «Давайте бороться за то, чтобы успеваемость каждого ученика нашего класса была выше средней!». Видимо, Макар не очень хорошо знал математику. Давайте разберемся.

Как известно, средним арифметическим n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется число $M = M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, задаваемое равенством

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \qquad (1)$$

Следуя призыву Макара, мы должны были бы добиться одновременного выполнения неравенств $x_1 > M$, $x_2 > M$, ..., $x_n > M$. Сложив эти n неравенств, мы получим противоречие с (1).

Отметим некоторые важные свойства среднего арифметического:

I. $M(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = M(x_1, x_2, \dots, x_n) + M(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

II. $M(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) = \alpha M(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

III. $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant M(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Упражнение 1. Докажите свойства I—III.

Упражнение 2. Докажите для $n > 1$ неравенство $C_{2n}^n > \frac{2^{2n-1}}{n}$. Это легко сделать методом математической индукции, но можно — при помощи свойства III.

Свойство III часто используется следующим образом: чтобы установить, что среди чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ есть число, большее числа d, достаточно проверить, что $M(x_1, x_2, \dots, x_n) > d$. Рассмотрим, например, задачу, предлагавшуюся на X Всесоюзной математической олимпиаде.

Задача 1. *На круглом столе как-то лежат 50 правильно идущих круглых часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.*

Решение. Обозначим через $f(t)$ сумму расстояний от центра стола O до концов минутных стрелок в момент времени t *час*, а через d — сумму расстояний от точки O до центров часов. Требуется доказать, что $f(t) > d$ в некоторый момент t. Мы покажем, что существует t_0, для которого $M\left(f(t_0), f\left(t_0 + \frac{1}{2}\right)\right) > d$. Значит, один из моментов t_0, $t_0 + \frac{1}{2}$ — искомый.

Обозначим через O_i центр i-х часов, через A_i — конец минутной стрелки этих часов в некоторый момент t, через B_i — конец минутной стрелки тех же часов через полчаса, т. е. в момент $t + \frac{1}{2}$. Поскольку по условию все часы «правильно идут», найдется такой момент t_0, в который точки O, A_1 и B_1 не лежат на одной прямой. Рассмотрим треугольник OA_1B_1 и медиану OO_1 в нем (рис. 1). Легко доказать, что в любом треугольнике длина медианы меньше полусуммы длин сторон, между которыми она заключена (докажите!). Поэтому в момент t_0 мы имеем

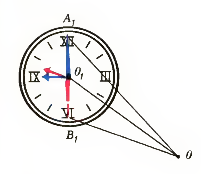


Рис. 1.

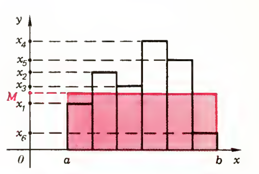


Рис. 2.

$\frac{|OA_1|+|OB_1|}{2}>|OO_1|$. Для остальных часов в этот момент $\frac{|OA_i|+|OB_i|}{2}\geqslant$ $\geqslant|OO_i|$ (почему только $\geqslant$, а не $>$?). Сложив 50 неравенств, получим $M\left(f(t_0),\ f\left(t_0+\frac{1}{2}\right)\right)>d.$

2. На отрезке

В задаче 1 оказалось достаточным оценить среднее арифметическое двух значений функции. А нельзя ли рассмотреть среднее всех значений? Чтобы подойти к определению этого понятия, придадим геометрический смысл среднему n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Разобьем какой-нибудь отрезок $[a;\ b]$ на n равных частей и построим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат получившиеся отрезочки длины $\frac{b-a}{n}$, а высоты равны, соответственно, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (рис. 2). Площадь этой ступенчатой фигуры равна $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot(b-a)$. Таким образом, $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — это высота прямоугольника с основанием $[a;\ b]$, равновеликого построенной ступенчатой фигуре.

Пусть теперь f — функция, непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a;\ b]$. Давайте под *средним значением $M(f)$ функции f на отрезке $[a;\ b]$* понимать высоту прямоугольника с основанием $[a;\ b]$, равновеликого соответствующей криволинейной трапеции (рис. 3). Поскольку в рассматриваемом случае площадь этой трапеции равна $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ («Алгебра и начала анализа 10», п. 101), $M(f)$ определяется формулой

$$M(f)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Определение (2) годится не только для непрерывной и неотрицательной функции, но и для любой функции, определенной на $[a;\ b]$, для которой правая часть равенства (2) имеет смысл.

Так определенное среднее значение обладает свойствами, аналогичными свойствам I—III:

I′. $M(f+g)=M(f)+M(g)$.

II′. $M(\alpha f)=\alpha M(f)$.

III.′ $\min\limits_{[a;\ b]} f\leqslant M(f)\leqslant\max\limits_{[a;\ b]} f$.

Упражнение 3. Докажите свойства I′—III′.

Упражнение 4. Выведите из I′—III′ свойство

IV′. Если $f(x)\leqslant g(x)$ для всех $x\in[a;\ b]$, то $M(f)\leqslant M(g)$.

Со средним значением функции на отрезке вы уже сталкивались в заметке А. Виленкина «Игла Бюффона» («Квант», 1977, № 5). Приведем еще один пример применения этого понятия.

Задача 2. *На плоскости даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите неравенство*

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}|\geqslant$$
$$\geqslant|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|. \qquad (3)$$

Наше решение этой задачи будет опираться на ее одномерный вариант:

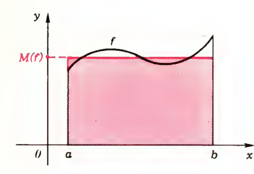


Рис. 3.

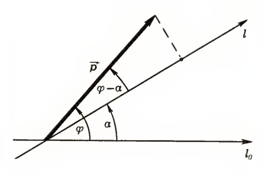


Рис. 4.

Упражнение 5. Докажите, что если a, b, c, d — действительные числа, сумма которых равна 0, то

$$|a|+|b|+|c|+|d| \geqslant |a+d|+|b+d|+|c+d|. \qquad (4)$$

Решение. Если в (3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ заменить их проекциями на какую-нибудь ось («Геометрия 9»), получится (4). Возникает идея: доказать (3), рассматривая проекции данных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ на всевозможные оси. Попробуем ее реализовать.

Пусть $\vec{p}$ — вектор. Введем вспомогательную функцию p следующим образом: фиксируем некоторую ось l_0; обозначим через $p(\alpha)$ проекцию вектора $\vec{p}$ на ось l, образующую с осью l_0 угол α (рис. 4). Если φ — угол между вектором $\vec{p}$ и осью l_0, то $p(\alpha)=|\vec{p}|\cos(\varphi-\alpha)$.

Рассмотрим среднее значение $M(|\vec{p}|)$ функции $\alpha \to |p(\alpha)|$ на отрезке $[0; 2\pi]$. Из определения (2)

$$M(|\vec{p}|)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(\alpha)|\,d\alpha=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\vec{p}|\,|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\alpha=$$
$$=\frac{|\vec{p}|}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\alpha. \qquad (5)$$

Покажем существование такого $k\neq 0$, что для любого вектора $\vec{p}$ справедливо равенство

$$M(|\vec{p}|)=k\,|\vec{p}|. \qquad (6)$$

В силу (5) достаточно доказать, что интеграл $\int_0^{2\pi}|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\alpha$ не зависит от вектора $\vec{p}$, то есть не зависит от угла φ.

$$\int_0^{2\pi}|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\alpha=\int_0^{2\pi}|\cos(\alpha-\varphi)|\,d\alpha=$$
$$=\int_{0-\varphi}^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha=\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha=$$
$$=\int_{-\varphi}^{0}|\cos\alpha|\,d\alpha+\int_0^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha=$$
$$=\int_{2\pi-\varphi}^{2\pi}|\cos(\alpha-2\pi)|\,d\alpha+$$
$$+\int_0^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha=\int_{2\pi-\varphi}^{2\pi}|\cos\alpha|\,d\alpha+$$
$$+\int_0^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha=\int_0^{2\pi-\varphi}|\cos\alpha|\,d\alpha+$$
$$+\int_{2\pi-\varphi}^{2\pi}|\cos\alpha|\,d\alpha=\int_0^{2\pi}|\cos\alpha|\,d\alpha. \qquad (7)$$

В этой выкладке использованы два свойства интегралов:

$$\int_a^b f(x+p)\,dx=\int_{a+p}^{b+p}f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

(«Алгебра и начала анализа 10», п. 106 и задача № 512). Центральным местом выкладки является использование того факта, что 2π — период функции $\alpha \to \cos\alpha$.

Интеграл $\int_0^{2\pi} |\cos\alpha|\, d\alpha$ легко вычислить (он равен 4), но нам важно лишь то, что он не зависит от φ и отличен от 0.

Если $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$, то для любого α имеем $a(\alpha)+b(\alpha)+c(\alpha)+d(\alpha)=0$. В силу (4)

$$|a(\alpha)|+|b(\alpha)|+|c(\alpha)|+|d(\alpha)| \geqslant \geqslant |a(\alpha)+d(\alpha)|+|b(\alpha)+d(\alpha)|+|c(\alpha)+d(\alpha)|. \quad (8)$$

Поскольку (8) выполнено для любого $\alpha \in [0;\ 2\pi]$, из свойств IV′ и I′ вытекает

$$M(|a|)+M(|b|)+M(|c|)+M(|d|) \geqslant M(|a+d|)+M(|b+d|)+M(|c+d|).$$

Из (6)

$$k|\vec{a}|+k|\vec{b}|+k|\vec{c}|+k|\vec{d}| \geqslant k|\vec{a}+\vec{d}|+k|\vec{b}+\vec{d}|+k|\vec{c}+\vec{d}|.$$

Сократив на k, получаем (3).

3. На окружности и сфере

Задача 3. *В пространстве даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите для них неравенство* (3).

Хотелось бы доказать (3) перенесением «плоского рассуждения» (из задачи 2) в пространство. Для этого надо как-то определить среднее значение модулей проекций вектора на всевозможные оси в пространстве. Чтобы пояснить, как это делается, рассмотрим сначала функции, определенные на окружности единичного радиуса.

Пусть f — такая функция. Для произвольного α положим $\bar{f}(\alpha) = f(A)$, где A — конец дуги нашей окружности с радианной мерой α (рис. 5). Таким образом, произвольной функции f, заданной на единичной окружности, мы поставили в соответствие некоторую функцию $\bar{f}$,

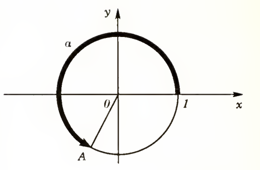


Рис. 5.

определенную на всей прямой. Очевидно, $\bar{f}$ — периодическая функция с периодом 2π. Определим теперь *среднее значение $M(f)$ функции f на окружности* как среднее значение функции $\bar{f}$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

В приведенном решении задачи 2 ключевую роль играла независимость среднего $M(|p|)$ от направления вектора $\vec{p}$. Эта независимость есть частный случай следующего общего свойства средних значений функции на окружности:

V′. *Пусть f и g — функции, определенные на окружности, причем существует такой угол α, что для любой точки A окружности $g(A) = f(R^{\alpha}(A))$* (здесь R^{α} — поворот вокруг центра данной окружности на угол α). *Тогда* $M(g) = M(f)$.

Упражнение 6. Докажите свойство V′.

Переходя к задаче 3, рассмотрим в пространстве сферу единичного радиуса с центром в начале координат O. Для функций, заданных на этой сфере, можно так определить среднее значение, чтобы свойства I — V′ выполнялись. Мы не можем здесь объяснить, как это делается, так как для этого пришлось бы ввести интегрирование по сфере. (Это можно сделать с помощью интегральных сумм примерно так же, как определяется интеграл на прямой в п. 104 учебника «Алгебра и начала анализа 10».)

Допустим, что *среднее значение $M(f)$ функции f на сфере* как-то определено, причем свойства I′—V′ выполняются. (Таким образом, мы как бы рассматриваем аксиоматическое задание среднего значения функ-

ции на сфере. Интересно отметить, что «аксиомами» I′—V′ оно определяется однозначно.)

Пусть $\vec{p}$ — вектор. Введем вспомогательную функцию p следующим образом: для любой точки A нашей сферы обозначим через $p(A)$ проекцию вектора $\vec{p}$ на ось, определяемую вектором $\overrightarrow{OA}$.

Рассмотрим среднее значение $M(|p|)$ функции $A \to |p(A)|$ на сфере. Покажем существование такого $k \neq 0$, что для любого вектора $\vec{p}$ выполняется (6). Для этого, ввиду свойства II′, достаточно доказать, что $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ влечет $M(|p|) = M(|q|)$.

Упражнение 7. Покажите, что этого достаточно.

Пусть $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. Обозначим через R какой-нибудь поворот пространства вокруг оси, проходящей через точку O, который переводит луч с направляющим вектором $\vec{q}$ в луч с направляющим вектором $\vec{p}$. Тогда для любой точки A сферы $q(A) = p(R(A))$. Из V′ вытекает $M(|q|) = M(|p|)$.

Дальнейшее решение задачи 3 дословно повторяет решение задачи 2. (Упражнение 5 и задачи 2, 3 исчерпывают задачу М394.)

4. Длина через ширину

Идею, на которой основано решение задач 2 и 3, можно использовать для вычисления длины плоской замкнутой выпуклой ломаной.

Пусть $Л$ —такая ломаная, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ее звенья. Фиксируем некоторую ось l_0. Пусть l_α — ось, образующая с осью l_0 угол α. Обозначим через $Ш(\alpha)$ «ширину» нашей ломаной в направлении оси l_α, т. е. длину ее проекции на ось l_α. Оказывается, если знать «ширину» ломаной $Л$ в произвольном направлении, т. е. уметь вычислять функцию $\alpha \to Ш(\alpha)$, то можно найти ее длину L. Покажем, как это сделать.

Обозначим через $a_i(\alpha)$ длину проекции звена a_i на ось l_α.

Упражнение 8. Докажите, что $Ш(\alpha) = \frac{1}{2}[a_1(\alpha) + a_2(\alpha) + \ldots + a_n(\alpha)]$.

В решении задачи 2 было показано, что среднее значение функции $\alpha \to a_i(\alpha)$ пропорционально $|a_i|$. Из (5) и (7) коэффициент пропорциональности равен $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\cos\alpha|\, d\alpha = \frac{2}{\pi}$.

Из упражнения 8 и свойств I′, II′ среднее значение $M(Ш)$ функции $Ш$ равно полусумме средних значений функций $\alpha \to a_i(\alpha)$. Следовательно,

$$M(Ш) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}|a_1| + \frac{2}{\pi}|a_2| + \ldots + \frac{2}{\pi}|a_n|\right) = \frac{1}{\pi}(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|) = \frac{1}{\pi}L.$$

Отсюда и из (2)

$$L = \pi \cdot M(Ш) = \pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Ш(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} Ш(\alpha)\, d\alpha \quad (9)$$

Таким образом, зная функцию $Ш$, мы можем найти длину L ломаной $Л$.

Упражнение 9. Докажите, что если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше d, то его периметр меньше πd.

Формула (9) справедлива для любой плоской замкнутой выпуклой кривой. Изложенный метод определения длины «через ширину» предложил в 1930 году известный польский математик Г. Штейнгауз.

5. Длина суммы

Задача 4. *На плоскости даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, сумма длин которых равна* 1. *Докажите, что среди них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше* $\frac{1}{\pi}$.

Решите эту задачу, следуя предлагаемому ниже плану. Пусть $З$ — подмножество множества $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots$

..., $\vec{a}_n\}$ с наибольшей длиной суммы.

Упражнение 10. Докажите, что все векторы из B «смотрят в одну сторону», т. е. образуют с некоторой осью острые углы.

Назовем *псевдопроекцией* вектора $\vec{p}$ на ось l обычную проекцию, если угол между $\vec{p}$ и l — острый, и число 0 — в противном случае. Фиксируем некоторую ось l_0. Пусть l_α — ось, образующая с осью l_0 угол α. Положим

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } \cos x > 0, \\ 0, & \text{если } \cos x \leqslant 0. \end{cases}$$

Упражнение 11. Проверьте, что $\int_0^{2\pi} g(\varphi - \alpha)\, d\alpha = 2$ при любом φ.

Если φ — угол между вектором $\vec{p}$ и осью l_0, то псевдопроекция этого вектора на ось l_α равна $|\vec{p}|g(\varphi - \alpha)$.

Обозначим сумму псевдопроекций векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ на ось l_α через $f(\alpha)$.

Упражнение 12. Докажите, что среднее значение функции f на отрезке $[0; 2\pi]$ равно $\frac{1}{\pi}$.

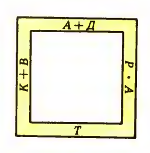
Упражнение 13. Докажите, что ось l_α можно выбрать так, что сумма псевдопроекций данных векторов на эту ось будет не меньше $\frac{1}{\pi}$.

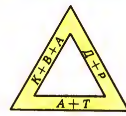
Упражнение 14. Докажите утверждение задачи 4.

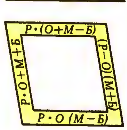
Константу $\frac{1}{\pi}$ в задаче 4 нельзя заменить никакой большей константой. В этом можно убедиться, взяв достаточно большое n и векторы, идущие по сторонам правильного n-угольника.

Если в задаче 4 заменить $\frac{1}{\pi}$ на $\frac{1}{4}$, соответствующее утверждение будет верно и для векторов в пространстве.

Арифметика с геометрией







а) Найдите длины сторон квадрата и равностороннего треугольника, изображенных на рисунке, если в формулах, выражающих длины сторон, каждой буквой зашифрована некоторая цифра.

б) Решите ту же задачу для одного ромба, изображенного на следующем рисунке.

В. Радунский

задачник Кванта

Задачи

М451—М455; Ф463—Ф467

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Решения задач из этого номера можно прислать не позднее 1 октября 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М451, М454» или «Ф467». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом и следующих номерах «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде.

М451. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что если прямая проходит через две или более отмеченных точек, то сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны нулю.

Ф. Вайнштейн

М452. В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причем вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1. Докажите, что в шестиугольнике $T_1 \cap T_2$ диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

Н. Нецветаев

М453. Дано множество положительных чисел $\{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n\}$. Для каждого его подмножества выпишем сумму входящих в него чисел (рассматриваются суммы из одного, двух, ..., n слагаемых). Докажите, что все выписанные числа можно так разбить на n групп, чтобы в каждой группе отношение наибольшего числа к наименьшему не превосходило 2.

М454. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает все свое молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и так далее. После того, как последний, седьмой гном разлил всем остальным свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

В. Гутенмахер

М455. Мы будем рассматривать многочлены P, Q, R, ... от одного переменного со старшим коэффициентом 1. Будем говорить, что два таких многочлена P и Q коммутируют, если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ тождественно равны (то есть после раскрытия скобок и приведения к стандартному виду все коэффициенты этих многочленов совпадают).

а) Для каждого числа a найдите все многочлены степени не выше 3, коммутирующие с многочленом $P(x) = x^2 - a$.

б) Пусть P — многочлен степени 2, k — натуральное число. Докажите, что существует не более одного многочлена степени k, коммутирующего с P.

в) Найдите все многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом P степени 2.

г) Многочлены Q и R коммутируют с одним и тем же многочленом P степени 2. Докажите, что они коммутируют между собой.

д) Докажите, что существует бесконечная последовательность многочленов P_2, P_3, P_4, ..., P_k, ..., где P_k — многочлен степени k, в которой любые два многочлена коммутируют, и многочлен P_2 имеет вид $P_2(x) = x^2 - 2$.

И. Бернштейн, Э. Туркевич

Ф463. Две льдины движутся поступательно с одинаковыми по абсолютному значению скоростями, одна — на север, другая — на запад. Оказалось, что в любой момент времени на обеих льдинах можно так расположить часы, что скорости концов секундных стрелок относительно Земли будут равными, причем, для каждого момента времени такое расположение единственно. Определить, на какое расстояние перемещаются льдины за сутки, если длина каждой секундной стрелки равна 1 *см*. Циферблаты часов расположены горизонтально. (8 кл.)

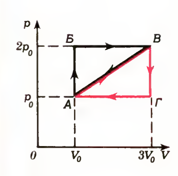
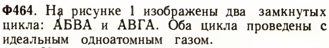


Рис. 1.



Ф464. На рисунке 1 изображены два замкнутых цикла: АБВА и АВГА. Оба цикла проведены с идеальным одноатомным газом.

1) Указать, на каких участках циклов газ получает и на каких участках отдает тепло.

2) У какого из циклов коэффициент полезного действия выше? Во сколько раз? (9 кл.)

Ф465. В высоковольтном электростатическом генераторе заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод радиуса $R = 1{,}5$ *м* (рис. 2). Оценить максимальные значения напряжения и тока, которые можно получить от такого генератора, если скорость ленты $v = 20$ *м/сек*, а ее ширина $l = 1$ *м*. Пробой в воздухе возникает при напряженности электростатического поля $E_0 \doteq 30$ *кв/см*. (9 кл.)

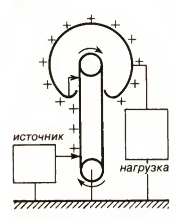


Рис. 2.

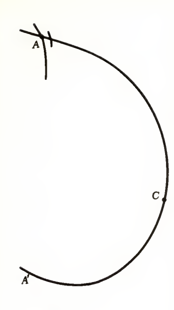


Рис. 3.

Ф466. Рисунок 3 сделан с фотографии треков частиц в камере Вильсона. Распады ядер газа, наполняющего камеру Вильсона, вызваны в данном случае действием на них быстрых нейтронов. Камера Вильсона была заполнена смесью водорода (H_2), паров спирта (C_2H_5OH) и воды (H_2O) и помещена в магнитное поле с индукцией 1,3 *тл*. Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости рисунка.

1) Определить энергию протона, появившегося в точке *A*. Траектория этого протона — кривая *AA′*. Почему меняется кривизна траектории протона? Определить энергию протона в точке *C* его траектории.

Масса протона равна $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг*.

2) Определить, ядро какого элемента распалось в точке *A*, если треки частиц, начинающиеся в этой точке, идентифицированы как следы двух протонов и двух α-частиц. (10 кл.)

Ф467. Луна одновременно фотографируется с одной и той же стороны с Земли и со спутника Луны. Орбита спутника круговая. Диаметр изображения Луны на фотографии, полученной на Земле, равен 4 *мм*, а на спутнике Луны — 250 *мм*. Найти период обращения спутника Луны по его орбите, если оба снимка сделаны с помощью одинаковых объективов с фокусным расстоянием 500 *мм*. Принять, что ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше чем на Земле и расстояние от Земли до Луны равно 380 000 *км*. (10 кл.)

Решения задач

М411, М412*), М414, М415; Ф423—Ф427

М411. *Три отрезка с концами на сторонах треугольника, параллельные его сторонам, проходят через одну точку и имеют одинаковую длину x. Найдите x, если длины сторон треугольника равны a, b, c.*

На рисунке 1 заштрихованы три треугольника, подобные *ABC*, у каждого из которых одна сторона имеет длину *x*.

Рассмотрим стороны трех заштрихованных треугольников, параллельные стороне *AC* длины *b*; обозначим длины этих сторон через b_1, b_2 и b_3. Заметим, что сумма их длин равна $2b$ ($b = |AC|$): $b_1 + b_2 + b_3 = 2b$, так что $\frac{b_1}{b} + \frac{b_2}{b} + \frac{b_3}{b} = 2$ — сумма коэффициентов подобия этих трех треугольников равна двум. Поэтому и $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 2$, откуда

$$x = \frac{2abc}{ab + ac + bc}.$$

А. Ягубьянц

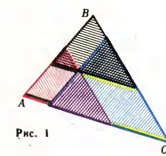


Рис. 1

*) Задача М413 решена в статье И. Яглома «О хордах непрерывных кривых», «Квант», 1977, № 4.

М412. *В городе на каждую площадь выходит не менее трех улиц. На всех улицах введено одностороннее движение так, что с любой площади можно проехать на любую другую. Докажите, что можно запретить движение по одной из улиц (на участке между двумя площадями) так, что по-прежнему с любой площади можно будет проехать на любую другую.*

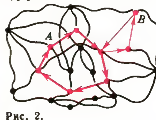


Рис. 2.

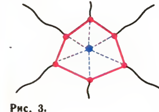


Рис. 3.

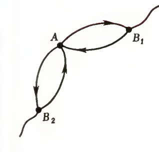


Рис. 4.

Докажем наше утверждение индукцией по числу площадей. Если площадей две, то оставим две улицы, соединяющие первую площадь со второй и вторую с первой, а остальные закроем.

Пусть площадей больше двух. Предположим, что нам удалось указать замкнутый маршрут по улицам города, начинающийся и кончающийся на площади A и проходящий не менее чем по трем площадям. (Как строятся кольцевые маршруты, показано на рисунке 2: мы берем маршрут, соединяющий площадь A с некоторой площадью B, затем маршрут, соединяющий B с A, и выделяем нужный нам маршрут — красное «кольцо» на рисунке.) Изменим план города: объявим весь этот кольцевой маршрут новой площадью, а улицами объявим все улицы, не входящие в наш кольцевой маршрут, сохранив на них направление движения. При этом у нас, возможно, появятся улицы, начинающиеся и кончающиеся на новой площади. Проверим, что полученный «город» удовлетворяет всем условиям задачи. Для этого нужно убедиться, что на новую площадь выходит не меньше трех улиц. Это обеспечивается нашим предположением, что в кольцевом маршруте не меньше трех площадей (см. рис. 3). Не менее ясно, что по-прежнему с любой площади можно проехать на любую другую, — наша «перепланировка» могла только сократить соответствующие маршруты. Таким образом, мы получили город, удовлетворяющий условиям задачи и имеющий меньшее число площадей. По предположению индукции в нем есть «лишняя» улица. Ей соответствует некоторая улица старого города. Запретим по ней движение. Легко убедиться, что проезд по-прежнему возможен. Действительно, рассмотрим площади $П_1$ и $П_2$ и маршрут, соединяющий $П_1$ с $П_2$ в новом городе и не проходящий через закрытую улицу. Перенесем этот маршрут в старый город. Если этот маршрут не проходил через новую площадь, то он соединяет $П_1$ с $П_2$. В противном случае он разобьется на две части: до «кольца» и после «кольца». Добавив к нему соответствующую часть кольца, мы получим нужный маршрут, соединяющий $П_1$ с $П_2$ в старом городе и не проходящий через закрытую улицу.

Осталось рассмотреть города, в которых нет длинных кольцевых маршрутов. Возьмем некоторую площадь A такого города. Если с нее можно проехать на площадь B по одной улице, то и с площади B на нее можно проехать по одной улице — иначе удалось бы указать большое кольцо. Поступим теперь следующим образом: рассмотрим площадь A и соседнюю с ней площадь B_1. Площадь B_1 соединена с площадью A (см. рис. 4). Кроме этого, есть еще одна улица, выходящая на A. Пусть она другим концом выходит на площадь B_2. Но тогда есть еще одна улица, соединяющая A и B_2 — с противоположным направлением движения. Поэтому если мы объявим кольцо AB_1A новой площадью, условия задачи будут выполнены: на новую площадь будет выходить не меньше трех улиц.

Л. Лиманов

◆

М414. а) *Из пяти треугольников, отсекаемых от данного выпуклого пятиугольника (рис. 5), площади четырех равны S, площадь пятого — $3S/2$. Найдите площадь пятиугольника.*

б) *Докажите, что если S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 — площади пяти этих треугольников, а x — площадь пятиугольника, то*

$$x^2-(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5)x+(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_4+S_4S_5+S_5S_1)=0.$$

Начнем сразу с задачи б). Пусть S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 — площади треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, $A_4A_5A_1$, $A_5A_1A_2$ соответственно. Обозначим через a площадь треугольника $A_1A_2A_4$, через b — площадь треугольника $A_1A_3A_4$ и через c — площадь треугольника $A_1A_3A_5$. Тогда (см. рис. 6—8):

$$x=S_2+a+S_4;\quad x=S_1+b+S_4;\quad x=S_1+c+S_3. \qquad (1)$$

Пусть величины углов $A_2A_1A_3$, $A_2A_1A_4$, $A_2A_1A_5$ равны α, β и γ соответсвенно. Тогда (рис. 9):

$$2S_1=|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\sin\alpha,$$
$$2S_4=|A_1A_4|\cdot|A_1A_5|\sin(\gamma-\beta),$$
$$2S_5=|A_1A_2|\cdot|A_1A_5|\sin\gamma,$$

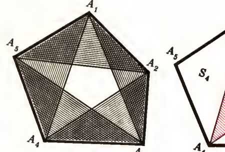




Рис. 5.

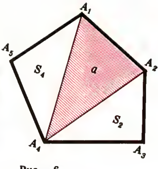


Рис. 6.

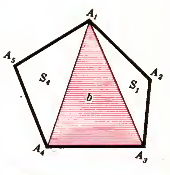


Рис. 7.

Рис. 8.

$$2b = |A_1A_3|\cdot|A_1A_4|\sin(\beta-\alpha),$$
$$2a = |A_1A_2|\cdot|A_1A_4|\sin\beta,$$
$$2c = |A_1A_3|\cdot|A_1A_5|\sin(\gamma-\alpha),$$

откуда

$$S_1S_4 + bS_5 = k\,[\sin\alpha\sin(\gamma-\beta) + \sin\gamma\sin(\beta-\alpha)],$$
$$ac = k\sin\beta\sin(\gamma-\alpha), \qquad (2)$$

где $k = \frac{1}{4}\,|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|\cdot|A_1A_4|\cdot|A_1A_5|$. Легко проверить тождество

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma) + \sin\beta\sin(\gamma-\alpha) + \sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0.$$

Поэтому, в силу (2),

$$S_1S_4 + bS_5 - ac = 0. \qquad (3)$$

Подставляя в соотношение (3) вместо a, b и c их выражения через x, S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5, получаем:

$$S_1S_4 + (x - S_1 - S_4)S_5 - (x - S_2 - S_4)(x - S_1 - S_3) = 0,$$

и, следовательно,

$$x^2 - x\,(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) + (S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_4 + S_4S_5 + S_5S_1) = 0.$$

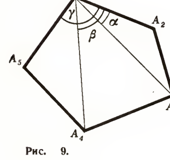


Рис. 9.

Подставляя в это уравнение $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S$, $S_5 = 3S/2$, получим ответ задачи а): $x = 4S$ (см. рис. 10).

Приведенное нами решение задачи б) предложил в 1824 году однофамилец знаменитого Гаусса — «придворный советник» Гаусс (Herr Hofrath Gauss). Оно опубликовано в журнале «Astronomische Berichte», 1824, т. 2, с. 343. В этом решении существенно используется в ы п у к л о с т ь исходного пятиугольника. Однако доказанный результат справедлив для произвольного пятиугольника — и не только невыпуклого, но и такого, стороны которого самопересекаются (например, как на рисунке 11). Подробно об этом рассказано в статье А. Лопшица «Задача Мёбиуса и ее продолжение», «Квант», 1977, № 3.

А. Лопшиц

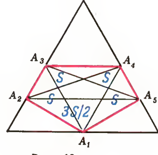


Рис. 10.

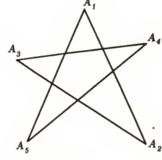


Рис. 11.

М415. *Какое наибольшее число королей можно расставить на торической шахматной доске $n \times n$, чтобы они не били друг друга? Торическая шахматная доска получается из обычной размером $n \times n$, у которой верхняя и нижняя горизонтали, а также левая и правая вертикали считаются склеенными. На торической доске с каждого поля король может пойти на восемь соседних полей (рис. 12).*

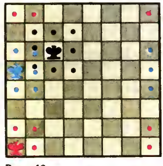
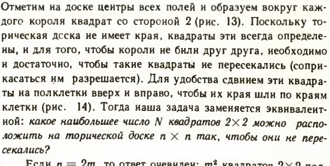


Рис. 12.



Отметим на доске центры всех полей и образуем вокруг каждого короля квадрат со стороной 2 (рис. 13). Поскольку торическая доска не имеет края, квадраты эти всегда определены, и для того, чтобы короли не били друг друга, необходимо и достаточно, чтобы такие квадраты не пересекались (соприкасаться им разрешается). Для удобства сдвинем эти квадраты на полклетки вверх и вправо, чтобы их края шли по краям клетки (рис. 14). Тогда наша задача заменяется эквивалентной: *какое наибольшее число N квадратов 2×2 можно расположить на торической доске $n \times n$ так, чтобы они не пересекались?*

Если $n = 2m$, то ответ очевиден: m^2 квадратов 2×2 полностью закроют всю доску и $N = m^2 = \frac{n^2}{4}$. Пусть теперь $n = 2m + 1$; тогда ясно, что в каждом ряде останется не меньше одной пустой клетки, т. е. в каждом ряду квадраты покроют не больше $2m$ клеток, а всего будет покрыто не больше $2m(2m+1)$ клеток, т. е. $N \leqslant \frac{2m(2m+1)}{4}$. Поскольку N — число целое, можно написать также, что

$$N \leqslant \left[\frac{m(2m+1)}{2}\right] = \left[\frac{n^2 - n}{4}\right].$$

Оказывается, что эта оценка точна: на торической доске $n \times n$ всегда можно разместить $\left[\frac{n^2-n}{4}\right]$ квадратов 2×2.

Укажем простейший способ такого размещения. Пусть сначала m четное, тогда $n = 4k + 1$, $N = \frac{m}{2} \cdot (2m + 1)$. Оставим пустыми клетки, получающиеся друг из друга ходом коня в одном и том же направлении (см. рис. 15). Тогда оставшиеся клетки нетрудно закрыть квадратами, как на рисунке 16. Поставив короля в левый нижний угол каждого из квадратов, мы получим решение задачи.

Пусть теперь m нечетно, то есть $n = 4k + 3$. Тогда $N = \left[\frac{n^2-n}{4}\right] = (k+1)(4k+1)$. Разместить это количество квадратов можно следующим способом: вписать в исходный квадрат со стороной $4k + 3$ квадрат со стороной $4k+1$, оставив по краям рамочку, и заполнить его точно так, как выше, а затем плотно заполнить и рамочку, как показано на рисунке 17.

А. Толпыго

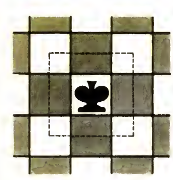


Рис. 13.

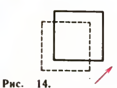


Рис. 14.

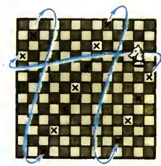


Рис. 15.

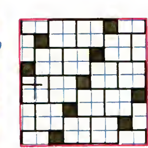


Рис. 16.

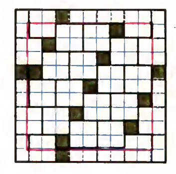


Рис. 17.

Ф423. *Масса воздушного шара вместе с волочащимся за ним канатом равна M (рис. 18). Действующая на шар выталкивающая сила равна $\vec{F}$, коэффициент трения каната о Землю μ. Сила сопротивления воздуха, действующая на воздушный шар, пропорциональна скорости шара относительно воздуха:* $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$. *Найти скорость шара относительно Земли, если дует горизонтальный ветер со скоростью* $\vec{u}$.

На шар действуют пять сил (см. рис. 18): сила тяжести $\vec{F}_т = M\vec{g}$, выталкивающая сила $\vec{F}$, сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c$, сила реакции Земли $\vec{N}$ и сила трения со стороны Земли $\vec{F}_{тр}$.

Обозначим через $\vec{v}'$ скорость шара относительно Земли. Тогда

$$\vec{F}_c = -\alpha(\vec{v}' - \vec{u}).$$

Из условия, что воздушный шар движется равномерно в горизонтальном направлении, следует

$$|\vec{F}_c| - |\vec{F}_{тр}| = 0$$

и

$$|\vec{F}| + |\vec{N}| - M|\vec{g}| = 0.$$

Кроме того,

$$|\vec{F}_{тр}| = \mu|\vec{N}|.$$

С учетом того, что

$$|\vec{F}_c| = -\alpha(|\vec{v}'| - |\vec{u}|),$$

из последних трех уравнений получим

$$\left|\vec{v}'\right| = \left|\vec{u}\right| - \frac{\mu}{\alpha}\left(M\left|\vec{g}\right| - \left|\vec{F}\right|\right).$$

А. Трубачев

Рис. 18.

◆

Ф424. *Для того чтобы лампочку, рассчитанную на напряжение сети 110 в, включить в сеть с напряжением 220 в, можно воспользоваться реостатом, который может быть включен по схемам а) и б) (рис. 19). Найти к. п. д. каждой из схем. Сопротивление лампочки 1000 ом, а реостата 2000 ом.*

Прежде всего оценим, в каком из двух случаев к. п. д. выше. В обоих случаях напряжение на лампочке одно и то же, следовательно, одинаковы напряжения и на участке AB (см. рис. 19). Ток, текущий через лампу, тоже один и тот же в схемах а) и б), значит, ток на участке AB в схеме а) больше, чем в схеме б). Поэтому и потери мощности на участке AB в первом случае больше, чем во втором. Вдобавок в схеме а) бесполезно расходуется мощность на участке реостата BC.

Итак, потери мощности в схеме а) больше, а к. п. д., соответственно, меньше.

Теперь найдем конкретные значения к. п. д. в схемах а) и б). В первом случае мощность, выделяемая в лампочке, равна $\frac{U_л^2}{R_л}$, а мощность, потребляемая от источника, равна $\frac{U^2}{R_1 + \frac{R_2R_л}{R_2 + R_л}}$ (здесь R_1 — сопротивление участка реостата AB, а R_2 — участка BC). Тогда

$$\eta_1 = \frac{U_л^2}{U^2}\,\frac{R_1 + \frac{R_2R_л}{R_2 + R_л}}{R_л}.$$

Для того чтобы подсчитать η_1, необходимо определить R_1 и R_2.

При последовательном соединении напряжения на отдельных участках цепи пропорциональны сопротивлениям этих участков:

$$\frac{U - U_л}{U_л} = \frac{R_1}{\frac{R_2R_л}{R_2 + R_л}}.$$

Кроме того,

$$R_1 + R_2 = R_р = 2R_л.$$

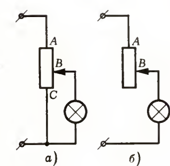


Рис. 19.

С учетом того, что $U = 2U_{л}$, из последних двух равенств получаем

$$R_1 = (2 - \sqrt{2})\ 10^3\ ом \text{ и } R_2 = \sqrt{2} \cdot 10^3\ ом.$$

Поэтому

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} \approx 0{,}3.$$

Во втором случае (в схеме *б*)) напряжение на верхнем участке реостата равно 220 *в* — 110 *в* = 110 *в*, то есть равно напряжению на лампочке. Это означает, что на этом участке выделяется такая же мощность, как и на лампочке. Следовательно,

$$\eta_2 = 0{,}5.$$

И. Соловейчик

◆

Ф425. *В пространство между пластинами незаряженного плоского конденсатора вносится металлическая пластина, имеющая заряд Q. Между пластиной и обкладками конденсатора при этом остаются зазоры l_1 и l_2. Площади всех пластин одинаковы и равны S. Определить разность потенциалов между обкладками конденсатора.*

Так как конденсатор не заряжен, его обкладки не участвуют в создании электрического поля. Поэтому поле внутри конденсатора создается только внесенной заряженной пластиной.

Будем считать, что линейные размеры пластины много больше ее толщины и толщин зазоров l_1 и l_2. Это означает, что электрическое поле — однородно. Его напряженность направлена от пластины, если $Q > 0$ (рис. 20), и к ней при $Q < 0$. По абсолютной величине напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в зазорах l_1 и l_2 одинаковы:

$$\left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 S}.$$

Рис. 20.

Разность потенциалов между обкладками конденсатора равна работе, совершаемой электрическим полем, по перемещению единичного положительного заряда с одной обкладки на другую:

$$U_{12} = -\left|\vec{E}_1\right| l_1 + \left|\vec{E}_2\right| l_2 = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 S}(l_2 - l_1).$$

И. Слободецкий

◆

Ф426. *В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиуса $r_1 = 5$ мкм при содержании массы вещества $m_1 = 0{,}04$ г в кубометре воздуха дальность видимости составляет $l_1 = 50$ м. Сколько вещества в кубометре воздуха распыляется другим источником завесы, который создает частицы радиуса $r_2 = 10$ мкм, если видимость сокращается до $l_2 = 20$ м?*

Рассмотрим слой воздуха с дымом на пути светового пучка (рис. 21). Выберем Δl настолько малым, чтобы в пределах этого слоя практически не было затенения одних частиц другими. Такой слой поглотит долю света, определяемую поперечным сечением ΔS всех частиц, находящихся в этом слое. В расчете на единицу поперечного сечения пучка получим

$$\Delta S = N\Delta l \pi r^2 = \frac{m}{{}^4/_3 \pi r^3 \rho}\,\Delta l \pi r^2 = \frac{m\Delta l}{{}^4/_3 r\rho}, \qquad (*)$$

где N — число частиц в единице объема, ρ — плотность распыленного вещества.

Запишем соотношение (*) для двух рассматриваемых случаев и найдем отношение толщин слоев, в которых поглощается одинаковая доля света:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{m_2}{m_1}\,\frac{r_1}{r_2}.$$

Аналогичные соотношения можно записать для 2-х, 3-х,..., n-х слоев, в пределах которых вновь можно пренебречь взаимным затенением частиц. Если в первом случае дальность видимости связана с выбранным Δl соотношением

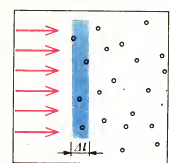


Рис. 21.

$l_1 = n\Delta l_1$, то и во втором случае, очевидно, $l_2 = n\Delta l_2$. Тогда можно записать

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n\Delta l_1}{n\Delta l_2} = \frac{m_2}{m_1}\frac{r_1}{r_2}.$$

Отсюда

$$m_2 = m_1 \frac{r_2}{r_1}\frac{l_1}{l_2} = 0{,}2\ г/м^3.$$

◆ *В. Белонучкин*

Ф427. *Две катушки с числами витков $n_1=125$ и $n_2=1000$ намотаны на тороидальный ферромагнитный сердечник диаметром $d=5$ см и площадью поперечного сечения $S=1$ см²(рис. 22). По первой катушке течет постоянный ток $I_1=1$ а, вторая катушка подключена к гальванометру. При размыкании цепи первой катушки через гальванометр проходит заряд $q=10^{-3}$ к. Полное сопротивление цепи второй катушки $R=100$ ом. Определить магнитную проницаемость материала, из которого сделан сердечник.*

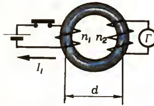


Рис. 22.

При протекании по первой катушке электрического тока в сердечнике возникает магнитное поле. Индукция магнитного поля, созданного проводником с током, всегда пропорциональна силе тока в проводнике. Она зависит также от конфигурации проводника и от магнитной проницаемости среды.

Из соображений симметрии очевидно, что в тороиде индукция магнитного поля одинакова по абсолютной величине во всех точках окружности, центр которой совпадает с центром тороида (см. рис. 22). Кроме того, поперечное сечение тороида мало. Таким образом, поле внутри тороида можно считать однородным. Строгий расчет, проведенный для данного случая, дает

$$|\vec{B}| = \mu_0\mu\frac{n_1 I_1}{\pi d},$$

где $\mu_0 = 4\cdot 10^{-7}$ гн/м — магнитная постоянная, μ — магнитная проницаемость материала сердечника.

Поток магнитной индукции через поперечное сечение тороида площадью S равен

$$\Phi = |\vec{B}|S = \mu_0\mu\frac{n_1 I_1}{\pi d}S.$$

При размыкании цепи первой катушки магнитный поток будет уменьшаться. Пусть за малый промежуток времени Δt поток уменьшится на $\Delta\Phi$. Во второй катушке возникнет электродвижущая сила индукции

$$|\mathscr{E}_2| = n_2\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$$

и пойдет ток

$$I_2 = \frac{|\mathscr{E}_2|}{R} = \frac{n_2}{R}\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}.$$

За время Δt через гальванометр пройдет заряд

$$\Delta q = I_2\Delta t = \frac{n_2}{R}|\Delta\Phi|.$$

Весь заряд, прошедший по цепи второй катушки, определяется полным изменением потока магнитной индукции:

$$q = \Sigma\Delta q = \frac{n_2}{R}\,\Sigma|\Delta\Phi| = \frac{n_2}{R}\Phi = \frac{n_1 n_2\mu_0\mu I_1 S}{\pi d R}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{q\pi d R}{n_1 n_2\mu_0 I_1 S} = 1000.$$

В. Светозаров

Н. Виленкин

Как возникло и развивалось понятие функции

У истоков

В те далекие времена, когда люди еще не умели считать, они уже знали, что чем больше оленей удастся убить на охоте, тем дольше племя будет избавлено от голода, чем дольше горит костер, тем теплее будет в пещере. Постепенно, с развитием скотоводства и земледелия, количество известных людям зависимостей увеличилось; например, люди узнали, что урожай увеличивается при увеличении площади поля, настриг шерсти — при увеличении стада овец, а чем больше людей занято в сооружении плотины, тем меньшая часть работы приходится на долю каждого из них.

Взвешивание, измерение длин и объемов и другие аналогичные операции поставили каждой величине в соответствие число — *меру* этой величины при данной единице измерения. Купцам надо было знать *зависимость* меры от выбранной единицы измерения. Они должны были твердо помнить, например, что в одном таланте содержится 60 мин, а потому 3 таланта — это все равно, что 180 мин — хоть меры разные, а величина одна и та же.

В обыденной жизни редко приходилось иметь дело с более сложными соотношениями. Но число разнообразных зависимостей, с которыми приходилось сталкиваться писцам, все время увеличивалось (писцы учитывали поступавшие налоги, определяли запас пищи, потребной войску для похода, количество кирпичей, необходимых для возведения дворца и т. д.). Чтобы обучать писцов, были написаны книги, содержащие решения типичных задач.

Высокого уровня математические знания достигли в Древнем Вавилоне. Для облегчения вычислений вавилоняне составили таблицы обратных значений чисел, квадратов и кубов и даже таблицы для сумм квадратов и кубов числа. Говоря современным языком, это были таблицы функций

$$y=\frac{1}{x},\ y=x^2,\ y=x^3,\ y=x^2+x^3.$$

С помощью таких таблиц можно было решать и обратные задачи: извлекать квадратные и кубические корни, решать квадратные уравнения и т. д. Комбинируя несколько таблиц, вавилоняне находили длину гипотенузы по заданным длинам катетов, то есть вычисляли значения функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$. И хотя путь от появления таблиц до создания общего понятия функции был еще очень велик, первые шаги по этому пути вавилоняне сделали.

Математики Древней Греции старались не выражать величины числами — они знали, что существуют несоизмеримые отрезки, а понятия иррационального числа у них не было. Но все же многие их исследования оказались весьма полезными, когда через два тысячелетия стало формироваться общее понятие функции: они изучили много кривых (эллипс, гиперболу, параболу, различные спирали и улитки и т. д.), исследовали некоторые задачи на наибольшее и наименьшее значения, открыли взаимоотношения между длинами отрезков хорд и диаметров. Особенно важным были результаты греческих астрономов, заложивших основы новой области математики — тригонометрии. Они составили таблицы зависимости между величиной дуги и длиной стягивающей ее хорды. По сути дела то были таблицы функции $y=\sin x$ — ведь длина хорды, стягивающей дугу в $2x$ (градусов), равна $2R\sin x$, где R — радиус круга (см. рис. 1). При их вычислении использовалась зави-

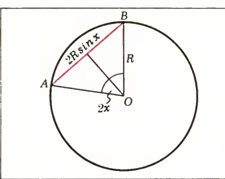


Рис. 1.

симость между длинами диагоиалей вписанного четырехугольника и длинами его сторои (теорема Птолемея *)).

После падения Римской империи (последняя четверть V в. и. э.) и распространеиия христианства, отрицавшего языческую науку н философию, цеитр иаучных исследоваиий постепеино переместился в арабоязычиые страиы. Ученые этих стран ввели иовые тригоиометрические фуикции и усовершенствовали таблицы хорд.

Исследование же общих зависнмостей между величинами начал в XIV веке французский ученый Николай Оресм. В его рукописях есть рисункн, напоминающие современиые графикн фуикций. Ои даже пытался классифицировать эти графики. Одиако продвииуться дальше ему помешало отсутствие общей алгебраической символики. Лишь после того, как в течение XVI века были развиты иачала буквенной алгебры (Фраисуа Виет), удалось сделать дальнейшие шаги.

Математнка перемеиных велични

В XVI—XVII веках техника, промышлеииость, мореходство поставили задачи, недоступные для математики древиости, имевшей дело лишь с неподвижными объектами, с постояинными величиiами.

В то же время стало распростраияться убежлеиие, что мир управляется законами природы, которые можно познать. Для формулирования этих законов и решения поставленных задач нужны были новые математические методы.

Одним нз первых над созданнем новых методов познания мира задумался основатель динамики Галилео Галнлей. Он размышлял о том, как меияется скорость падающего тела, по какому закону происходит колебание маятиика, как движется точка, расположеиная на ободе катящегося колеса.

Чтобы описать физические законы двнжеиня математически, нужно было ввести понятие *переменной* велнчины. Это сделал французский фнлософ н математик Рене Декарт, живший в конце XVI н первой половине XVII века.

«Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика». (Ф. Энгельс).

Для записи зависимостей между величинами Декарт примеиял буквы, а отношения между иеизвестными и известными величинами выражал в виде уравиений.

Выбрав определениые едииицы измереиия, можио выразить все изучаемые величины числами. Следовательио, зависимость между величинами переходит в зависимость между числами. Например, если выбрать в качестве едииц для измерения расстояиий и промежутков времени метр и секуиду, то зависимость пути, пройдеииого телом при свободиом падении, от времени выразится формулой $s={}^1/_2\ gt^2$, где g=9,81. При измеиении числа t меняется число s, а потому эта формула связывает друг с другом *числовые переменные* t и s.

Однако в течение долгого времени избегали говорить о числовых перемеииых, а вместо них говорили о перемеиных величинах. Чтобы отличить перемеиные величины, рассматриваемые в математике, от тех, которые изучает физика (расстояиий, промежутков времени, скоростей и т. д.), делали оговорку, что речь идет об «абстрактных перемеиных величииах», приинмающих числовые зиачения. Физические же перемеиные величины с этой точки зреиия приинмают ие числовые, а «имеиованиые» значения. Например, отдельиыми значеииями коикретиой величины, имеющей размериость длииы, являются ие числа 1, 2, 3, а 1 *м*, 2 *м*, 3 *см* и т. д.; причем, хотя 3 *см* и 0,03 *м* выражаются различными числами 3 и 0,03, все же 3 *см*=0,03 *м*.

Открытия Декарта дали математикам общий метод для изучения кривых. Теперь место геометрическнх рассмотрений, столь популяриых у греческих математиков, заняло алгеб-

*) «Кваит», 1976, № 7, с. 26.

раическое исследование уравнений кривых, — геометрические свойства устанавливались алгебраическими методами. Это был важный шаг на пути формирования общей идеи зависимости одних переменных величин от других. Многие кривые, которые изучали ученые XVII века, возникли из практических задач — они были нужны для описания качения зубчатых колес, движения маятника и т. д. Изучались и графики элементарных функций — синусоида, тангенсоида и т. д.

Рождение термина

В науке часто бывает, что длительное время применяется то или иное понятие, но оно фигурирует лишь неявно, не имея определенного названия — каждый ученый называет его посвоему. Из-за этого одни и те же рассуждения повторяются каждый раз заново. Введение нового термина приводит к уточнению соответствующего понятия, освобождению его от всего случайного и несущественного, к выявлению общих черт в рассуждениях, проводившихся независимо друг от друга в различных областях науки.

С 1673 года знаменитый немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц начал использовать в своих рукописях слово «*функция*». Однако он употреблял этот термин в очень узком смысле, у него речь шла лишь об отрезках касательных к кривым, об их проекциях на оси координат и о «другого рода линиях, выполняющих для данной фигуры некоторую функцию» (от латинского «*функтус*» — выполнять).

Иоганн Бернулли, один из первых учеников Лейбница, дал определение функции, свободное от геометрических терминов: «*функцией переменной называется количество, образованное каким угодно способом из этой величины и постоянных*». Это определение привело в восхищение престарелого Лейбница: он угадал, что отход от геометрической терминологии знаменует новую эпоху математики — эпоху изучения функций как самостоятельных объектов, притом основанного на числах, а не на геометрии.

Под «каким угодно способом» во времена Бернулли понимали арифметические операции, операции извлечения корней, тригонометрические и обратные тригонометрические, показательные и логарифмические «операции», а также их различные комбинации. Такие функции теперь называют *элементарными* (их сейчас изучают в школе).

В XVII и, особенно, в XVIII веке математики стали рассматривать функции, получаемые суммированием бесконечного множества элементарных функций. Это привело к расширению класса изучаемых функций. Один из самых замечательных математиков XVIII века член Петербургской академии наук Леонард Эйлер определял функцию так: «когда некоторые величины зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых» В одной из работ он говорит даже о графике функции, как о кривой, начерченной «свободным движением руки».

Спор о понятии функции

Вопрос, что же такое функция и как связаны между собой понятия функции и ее аналитического выражения, привлек к себе внимание математиков в связи со спором, в котором приняли участие виднейшие ученые XVIII века — Эйлер, Даламбер, Д. Бернулли и многие другие.

Решая задачу о колебаниях струны, Эйлер и Даламбер получили ответ, в который входила некоторая функция. Эта функция была связана с первоначальной формой колеблющейся струны. Эйлер считал, что первоначальное отклонение струны от положения равновесия может задаваться на разных участках струны разными формулами, например так:

$$y = \begin{cases} ax, \text{ если } 0 \leqslant x < \frac{l}{2}, \\ a(l-x), \text{ если } \frac{l}{2} \leqslant x < l \end{cases}$$

(l — длина струны). Даламбер же считал, что такие функции недопу-

стимы, что следует рассматривать лишь функции, имеющие одно аналитическое выражение для всех значений аргумента x.

Положение осложнилось после того, как Даниил Бернулли предложил формулу, выражавшую решение в виде суммы бесконечного ряда, составленного из тригонометрических функций, причем оказалось, что эта формула годится и в случае, указанном Эйлером. Получилось, что одна и та же функция может быть задана и одним выражением (суммой ряда), и разными выражениями. Это никак не укладывалось в сознании ученых XVIII века.

Возникший спор привел к тому, что в конце XVIII века математики, определяя функцию, избегали говорить о том, как она задана. Например, французский математик Л а к р у а писал: «Всякое количество, значение которого зависит от одного или многих количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, известно или нет, какие операции нужно применять, чтобы перейти от них к первому».

Современный этап

Окончательный разрыв между понятиями функции и ее аналитического выражения произошел в начале XIX века, после того как французский математик Ф у р ь е показал, что функции, заданные на разных участках по-разному, можно, вообще говоря, представить во всей области задания в виде суммы одного и того же бесконечного ряда. Таким образом, несущественно, одним или многими выражениями задана функция; суть лишь в том, какие значения принимает одна величина при заданных значениях другой величины.

После длительного уточнения этой идеи, в котором приняли участие немецкий математик Лежен Д и р и х л е, русский математик Николай Иванович Л о б а ч е в с к и й и другие ученые, пришли к следующему определению функции: «*Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное определенное значение величины y*».

По этому определению получилось, что функций гораздо больше, чем этого хотелось бы его авторам. Например, еще Дирихле заметил, что под это определение подпадает такая «странная» функция, как

$$D(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x-\text{иррациональное число}, \\ 1, \text{ если } x-\text{рациональное число}. \end{cases}$$

Действительно, каждому значению x соответствует определенное значение $D(x)$; например, $D\left(\frac{5}{6}\right)=1$, а $D(\pi)=0$. С точки же зрения математика XVIII века $D(x)$ совсем не функция, поскольку не указана формула, по которой ее можно вычислить.

После введения этого определения под одним и тем же словом «функция» стали пониматься совсем разные вещи. Глядя на формулу $s=\frac{1}{2}gt^2$, одни говорили, что s — функция аргумента t (путь — функция времени). Другие считали функцией выражение $\frac{1}{2}gt^2$, то есть придавали основное значение в ы р а ж е н и ю, по которому можно находить значения функции. Но все большее распространение получала третья точка зрения, согласно которой функцией здесь является не s и не выражение $\frac{1}{2}gt^2$, а з а к о н, позволяющий по заданному значению t находить значение s (тот же закон можно ведь записать и так: $s=\frac{1}{2}g\sqrt{t^4}$). Иными словами, функцию стали трактовать как закон, позволяющий по каждому значению x найти единственное значение y.

Когда была создана общая теория множеств, стало ясно, что в понятии функции значениями как x, так и y совсем не обязаны быть числа. Теперь под функцией f понимают зависимость или соответствие («Алгебра 6», пп. 16—17) между любыми множествами X и Y, при которых каждому элементу x из X соответствует един-

ственный элемент y из Y, $y=f(x)$. X называют *областью определения* функции, а множество $\{f(x) \mid x \in X\}$ — *множеством ее значений*. Обычно для произвольных множеств вместо слова «*функция*» предпочитают равносильный ему термин «*отображение*». Например, геометрические преобразования задают отображения множества точек плоскости (или пространства) на себя. Сопоставляя каждому треугольнику вписанную в него окружность, получаем отображение множества треугольников на множество окружностей, а сопоставляя треугольнику его площадь — отображение множества треугольников на множество положительных чисел. Функции, которые рассматривали Лейбниц и Бернулли, Эйлер, Лобачевский и Дирихле, являются отображениями одного числового множества на другое (например, функция $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$, отображает отрезок $[-R;\ R]$ на отрезок $[0;\ R]$). Их называют *числовыми* функциями.

Мы проследили развитие понятия функции от его истоков до современных обобщений. При столь общем подходе к понятию функции, который принят сейчас, уже трудно уловить его происхождение из задач физики, астрономии и геометрии. Но все же в основе остается тот факт, что при заданном значении некоторой физической величины зависящие от нее величины принимают совершенно определенные значения. Именно это и дает возможность использовать функциональные зависимости и при расчете полета межпланетного космического корабля, и при изучении сил, действующих в атомном ядре, и при выборе наиболее выгодного плана производства.

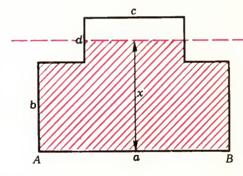


Рис 2.

Упражнения

1. Каждому параллелограмму сопоставляют его площадь. Является ли это соответствие функцией? Каковы ее область определения и множество значений?

2. Каждой окружности сопоставляют касательную к ней прямую. Является ли это соответствие функцией; если является, то каковы ее область определения и множество значений?

3. Каждой окружности сопоставляется вписанный в нее квадрат. Является ли это соответствие функцией? Является ли функцией соответствие, при котором каждой окружности сопоставляется вписанный в нее квадрат, стороны которого параллельны осям координат?

4. Является ли функцией соответствие, при котором каждому треугольнику сопоставляется центр описанной вокруг него окружности? Каковы здесь область определения и множество значений? Является ли функцией соответствие, при котором каждой тройке точек на плоскости сопоставляется центр проходящей через них окружности?

5. Является ли функцией соответствие, при котором каждой паре $(a,\ b)$ чисел сопоставляется точка с абсциссой a и ординатой b? Каковы здесь область определения и множество значений?

6. Выразите через x площадь фигуры, отсеченной от фигуры, изображенной на рисунке 2, прямой, параллельной основанию AB и отстоящей от него на расстояние x (размеры даны на рисунке).

Задачи наших читателей

Последовательность (a_n) определена следующим образом: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, a_{n+1} равно последней дроби в разложении $a_{n-1}+a_n$ в цепную дробь. Например,

$$a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{1+\frac{1}{5}},$$

поэтому $a_3=\frac{1}{5}$ и т. д.

а) Чему равно a_{1000}?

б) Всегда ли a_k будет обратно простому числу?

П. Кирей (г. Николаев)

Циссоиды

Циссоида Диоклесса *) — едва ли не самая древняя из замечательных кривых. Она может быть определена так. Рассмотрим произвольную окружность (O, r) и точку P на ней. Пусть PQ — диаметр окружности, а l — касательная к ней, проходящая через точку Q (рис. 1). Выберем произвольно точку $L \in l$. Пусть $[PL] \cap (O, r) = N$. Построим на отрезке PL точку M, для которой $|PM| = |LN|$. Множество точек M, построенное для всевозможных точек $L \in l$, и есть циссоида Диоклесса.

Положение точки M может быть описано парой чисел $\langle \varphi, \rho \rangle$, где $\varphi = \widehat{LPQ}$, $\rho = |PM|$. Пара $\langle \varphi, \rho \rangle$ называется ***полярными координатами*** ** (точки M, φ — ее ***полярным углом***, ρ — ***полярным радиусом***. Точка P при этом называется ***полюсом*** (аналог начала координат), вектор $\overrightarrow{PM}$ — ***радиусом-вектором*** циссоиды. В циссоиде Диоклесса $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Можно написать уравнение, связывающее полярные координаты произвольной точки циссоиды Диоклесса:

$$\rho = \frac{2r}{\cos\varphi} - 2r\cos\varphi$$

— полярное уравнение циссоиды (выведите его).

Прямая PQ является осью симметрии циссоиды Диоклесса. При стремлении φ к $\frac{\pi}{2}$ (или к $-\frac{\pi}{2}$) точка M стремится к L; таким образом, прямая l является асимптотой циссоиды.

*) Диоклесс жил где-то между 250 и 100 гг. до н. э.
** Полярную систему координат (для описания различных спиралей) первым ввел, по-видимому, в 70-е годы XVII века И. Ньютон.

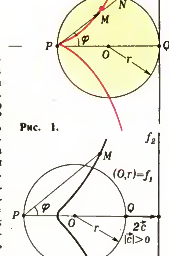


Рис. 1.

Рис. 2.

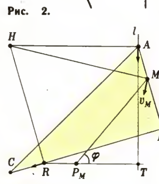


Рис. 3.

В конце XVII века понятие циссоиды было обобщено: пусть f_1, f_2 — две произвольные (плоские) кривые, P — произвольная точка. В остальном построение производится по-старому: берем произвольную точку $L \in f_2$ и откладываем на PL отрезок PM, для которого $|PM| = |LN|$ (здесь $N = f_1 \cap [PL]$). Полученное множество точек M называют ***циссоидой***.

Сообразите, например, какая циссоида получится, если $f_1 = (O, q)$, $f_2 = (O, s)$ и $P = O$.

На второй странице обложки изображено семейство циссоид, получающееся при фиксированных кривой $f_1 = (O, r)$ и полюсе $P \in (O, r)$, если f_2 меняется: каждая f_2 получается параллельным переносом $2\vec{c}$ касательной l («красная прямая» на обложке). (Напишите полярное уравнение этих циссоид — см. рис. 2. Оно будет, конечно, зависеть от параметра $|\vec{c}\,|$).

Циссоида Диоклесса («красная циссоида» на обложке) имеет в полюсе острие. Если прямая f_2 расположена вне окружности f_1, то в наиболее удаленной от f_2 точке циссоида имеет закругление. Если же $f_2 \cap f_1 \neq \varnothing$, то циссоида имеет в полюсе петлю. В частности, если f_2 проходит через центр окружности f_1, то циссоида превращается в строфоиду («Квант», 1977, № 2).

Приведем способ построения дуги циссоиды (из семейства циссоид, изображенного на обложке), принадлежащий Ньютону. Зададим в плоскости точку R и прямую l. Возьмем прозрачный угольник ABC ($\hat{B} = 90°$), у которого $|AB| = |RT|$ (T — основание перпендикуляра, опущенного из R на l). Будем перемещать угольник (рис. 3) так, чтобы вершина A скользила по l, а катет BC «проходил» через R. Тогда фиксированная точка M катета AB опишет дугу циссоиды (в частности, точка B — дугу строфоиды).

Как это показать? Проведем через M прямую, параллельную AR. Пусть эта прямая пересекается с RT в точке P_M. Из конгруэнтности треугольников ABR и ATR вытекает, что точка P_M занимает на отрезке RT положение, не зависящее от положения угольника ABC. Подсчитав $|MP_M|$, можно убедиться, что точка M описывает циссоиду. Предоставляем это читателю (рекомендуем использовать полярное уравнение).

Используя построение Ньютона, легко определить положение касательной к циссоиде в точке M. Проведем через точку R перпендикуляр к BC и через A — перпендикуляр к l. Пусть эти перпендикуляры пересекаются в точке H (рис. 3). Тогда перпендикуляр к HM, проведенный в точке M, будет искомой касательной.

В. Березин

Задачи

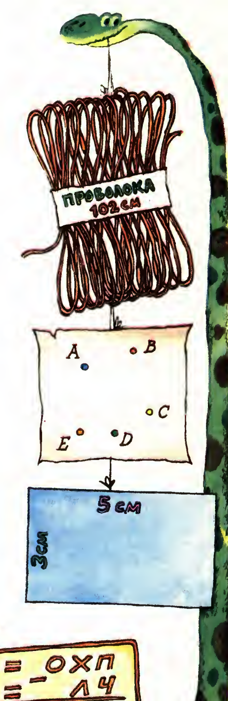
1. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков больше цифры единиц?

2. Кусок проволоки длиной 102 *см* нужно разрезать на части длиной 15 *см* и 12 *см*, но так, чтобы обрезков не было. Как это сделать? Сколько решений имеет эта задача?

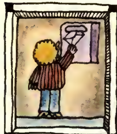
3. Может ли фигура, состоящая из пяти точек, иметь один центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

4. Сколькими способами можно из прямоугольника размером 3×5 *см* сложить треугольник, разрезав прямоугольник на две части одним прямолинейным разрезом? Способы считаются различными, если они приводят к неконгруэнтным треугольникам.

5. В действиях на рисунке каждая цифра зашифрована некоторой буквой. Расшифруйте эту запись, а затем запишите буквы по номерам в порядке возрастания (с 0 до 9). Какое слово у вас получилось?







Г. Розова

СЛУЧАЙ С ПЯТИКЛАССНИКОМ



Все началось с писем.

Письмо первое. «Здравствуй, Андрей! У нас в школе недавно была олимпиада по математике. Я решил все задачи, только в последней я не уверен. Некогда было проверить, все ли числа я нашел; да если бы и было время — все равно не стал бы перебирать все двузначные числа, потому что скучно это! Порешай и напиши, какие у тебя будут ответы, а то я сомневаюсь. Вот эта задача.

В некотором двузначном числе зачеркнули цифру, и оно уменьшилось в 31 раз. Какую цифру и в каком числе зачеркнули?

У меня получилось три ответа: 31, 62, и 93, причем зачеркивать надо первую цифру. Сергей».

Письмо второе. «Здравствуй, Сережа. Ты дал правильный ответ и, если ты так догадлив, то реши нашу олимпиадную задачу.

Трехзначное число больше двузначного, записанного его последними цифрами, в 26 раз. Найти это число. Сколько всего существует таких чисел? Андрей».

Получив это письмо, Сережа обрадовался, а потом попробовал решить задачу Андрея. Но на этот раз догадка не приходила, хотя Сережа испытал много чисел, пробовал составлять их сам. Тогда он подумал, что, может быть, задачу можно решить уравнением. Но что принять за x? Трехзначное число? А как тогда записать условие задачи?

Вдруг его «осенило», что все числа записываются с помощью лишь десяти цифр. В задаче неизвестно трехзначное число. Вот и три неизвестных:

число сотен — x,
число десятков — y,
число единиц — z.

А условие задачи запишется так:

$$100x + 10y + z = 26(10y + z),$$

или, после упрощений,

$$4x = 10y + z.$$

Тут Сережа снова призадумался — уравнение одно, а неизвестных три. Но как только он вспомнил, что x, y, z — цифры, дело опять пошло. В последнем равенстве справа стоит $10y + z$ — двузначное число, значит и слева $4x$ — тоже двузначное число. Так будет лишь при $x = 3, 4, .., 9$. И сразу получается ответ:

x	$10y+z$	y	z	Ответ
3	12	1	2	312
4	16	1	6	416
5	20	2	0	520
6	24	2	4	624
7	28	2	8	728
8	32	3	2	832
9	36	3	6	936

Теперь уже Сережа не сомневался, что нашел все числа. Потом он и свою задачу проверил, а Андрея попросил прислать еще задачи. Вот они.

Задачи

1. Найти все двузначные числа, которые делятся нацело на а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 6; е) 7; ж) 8; з) 9, и при этом дают частные, равные сумме цифр делимого.

2. В записи трехзначного числа все цифры различны и нуля среди них нет. Цифры этого числа начали менять местами, и все получающиеся при этом (различные) трехзначные числа сложили. Доказать, что эта сумма делится на 222.

Верно ли это утверждение, если в записи исходного трехзначного числа встречаются одинаковые цифры или есть нуль?

3. При делении некоторого двузначного числа на 6 в остатке получилось число, равное первой цифре делимого, а при делении того же числа на 10 остаток был равен второй цифре числа, а частное — 3. Найти все такие числа.



Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1976 году

Куйбышевский государственный университет

Куйбышевский государственный университет был открыт в 1969 году. В настоящее время недалеко от берега Волги ведется строительство университетского городка. Уже возведены корпуса механико-математического и физического факультетов, построено здание студенческого общежития.

Основная цель университета — подготовка специалистов высшей квалификации для работы в научно-исследовательских учреждениях, на промышленных предприятиях, в высших и средних специальных учебных заведениях и средних школах.

Подготовка специалистов в области математики, механики и физики осуществляется на механико-математическом и физическом факультетах.

Студенты-математики специализируются по прикладной математике, функциональному анализу и теории функций, по дифференциальным и интегральным уравнениям.

Студенты-механики специализируются по аэро- и гидромеханике, а также по механике деформируемого твердого тела.

Студенты-физики специализируются по теоретической физике, оптике и спектроскопии, радиофизике и электронике, физике полупроводников и диэлектриков, физике твердого тела.

Ниже приведены варианты вступительного письменного экзамена по математике и задачи из билетов устного экзамена по физике на механико-математическом и физическом факультетах Куйбышевского университета в 1976 году.

Математика

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. Один из двух соосных конусов опирается вершиной на основание другого конуса, длина его образующей равна l, величина угла при вершине в осевом сечении 2α. Величина угла при вершине осевого сечения второго конуса равна 2β. Найти объем общей части конусов, если отношение длин их высот равно k.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$$

3. Решить неравенство ($a>0$)

$$\log_2\left(\sqrt{x^2-2ax+1}-1\right)\leqslant 1.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\sin(x+y),\\ |x|+|y|=1.\end{cases}$$

Вариант 2

1. В конус, величина угла при вершине осевого сечения которого равна 2α, вписана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом β. Через гипотенузу основания проведена секущая плоскость так, что отношение площади сечения к площади основания пирамиды равно k. Определить угол наклона секущей плоскости основания и допустимые значения k.

2. Решить уравнение

$$2x+3-\sqrt{x^2-2x-3}=0.$$

3. Решить неравенство

$$4-\lg x\leqslant 3\sqrt{\lg x}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x\operatorname{tg}z=3,\\ \operatorname{tg}y\operatorname{tg}z=6,\\ x+y+z=\pi.\end{cases}$$

Физический факультет

Вариант 3

1. Отношение длин двух отрезков, заключенных между параллельными плоскостями, равно k, а величины углов, которые каждый из этих отрезков составляет с одной из плоскостей, относятся как 2:3. Найти величины этих углов и допустимые значения k.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=2.$$

3. Решить уравнение

$$\cos^2 x-\cos^2 3x+3\cos^2 2x=0.$$

4. Решить неравенство

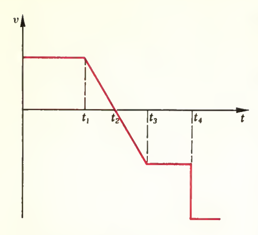
$$x^{-[\lg^2 x+\lg x^3+3]\log_x\sqrt{2}}\leqslant\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Вариант 4

1. В правильной четырехугольной пирамиде через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, проведена плоскость. Отношение площади сечения к площади боковой поверхности пирамиды равно k. Найти величину угла между двумя смежными боковыми гранями и допустимые значения k.

2. Решить уравнение

$$2x+1-\sqrt{x^2-3x+1}=0.$$



3. Решить уравнеиие
$\sin 3x - \sin 2x = b \sin x$.
4. Решнть иеравенство
$\log_x(2x^2 - 3x + 1) \leqslant 2$.

Физика

Механико-математический факультет

1. С горы высотой $h=2$ *м* и основанием $a=5$ *м* съезжают санкн, которые остаиавлнваются, пройдя горизоитальный путь $l=35$ *м* от основання горы. Найти коэффициент треиия.

2. В центр металлической полостн помещен заряд $+q$. Радиус полостн r. Как изменится напряжеиность поля в точке A, находящейся на расстояннн $r/2$ от центра полостн, еслн металлнческую полость заземлить?

3. Имеются две пластннки: одна нз стекла толщиной $l_1=16{,}1$ *мм*, другая нз кварца толщиной $l_2=10$ *мм*. Известио, что время распространения света в ннх одинаково. Чему равен показатель преломления кварца, если для стекла $n_{\text{ст}}=1{,}5$?

Физический факультет

1. График проекцнн скоростн тела иа иекоторую ось в завнсимости от времени имеет внд, прнведенный на рисуике. Нарисовать графики проекций перемещення н ускорения на ту же ось в завнснмостн от времени.

2. Два металлических шара раднусов $r_1=5$ *см* н $r_2=3$ *см* заряжены электрнчеством. Заряд первого шара $q_1 = 5$ ед. заряда СГСЭ, второго — $q_2 = 8$ ед. заряда СГСЭ. Как изменится величина зарядов, если шары соедннить между собой металлическнм проводником?

3. Найти фокусное расстояние стеклянной линзы, погруженной в воду, если известно, что ее фокусное расстояние в воздухе равно $F=20$ *см*. Показатели преломлення стекла и воды равиы $n_{\text{ст}}=1{,}6$ и $n_{\text{в}}=1{,}33$.

Л. Беркович, А. Тетерев, С. Фоминых

Московский институт управления им. С. Орджоникидзе

Научно-техническая революция, наиболее отчетливое выраженне которой наступило во второй половине двадцатого века, характеризуется значительным ускорением темпов роста общественного производства на базе огромных достижений в области науки и техники. Одним нз наиболее ярких проявлений научно-технической революции, оказывающих серьезное влияние на развитие экономики, является резкое увелнчение сложности управления народным хозяйством. В этой связи постоянно возрастает значенне н роль научной организацин управления.

Организация управлення есть не только сложная многоплановая наука, но и нскусство, овладеть которым возможно, лишь вооружнвшнсь фундаментальными знаниями теории и практики.

Московский институт управлення (МИУ) — единственный в нашей стране институт, готовящий специалистов по организации управления.

Наука серьезно обогатила арсенал методов и средств управления. Экономико-математическне методы, электронно-вычислительная техника, системный аналнз, исследование операций — все это только малая часть того, чем необходимо владеть специалисту в области организации управлення. Поэтому в нашем институте будущим специалистам в области управлення читается целый ряд специальных дисциплин, таких как теория управлення общественным производством, организация управления производством, социально-психологические основы управления, моделирование процессов управления, теория автоматизированных систем, экономическая кибернетика, зарубежный опыт управления н др.

В институте принят отраслевой принцип обучения, в соответствии с которым осуществляется подготовка специалистов для ряда отраслей: машиностроительная промышленность, энергетика, металлургическая промышленность, химическая промышленность, строительство, городское хозяйство, автомобильный транспорт.

Кроме специалистов по организацин управления, в нннституте готовят специалистов по автоматизированным системам управлення (по тем же отраслям промышленности и транспорта) н экономнстов-кибернетиков для различных отраслей народного хозяйства.

Характерной особенностью обучения в институте является совмещение учебного процесса с элементами научных исследований. При институте работают научно-исследовательская лаборатория управлення народным хозяйством н научно-вычислительный центр, которые осуществляют сотрудничество со многими предприятиями нашей страны.

В распоряжении студентов имеется свой вычислительный центр, где установлены современные вычислительные машины, включая ЭВМ единой серии. Многие исследования, проводимые студентами, отмечены медалями и дипломами ВДНХ, Министерства высшего и среднего специального образования СССР, ЦК ВЛКСМ.

Общественная жизнь студентов МИУ широка и многогранна. Славные трудовые дела студентов, участников строительства БАМа, животноводческих комплексов Смоленщины и ряда строек Болгарии и Чехословакии, отмечены многими правительственными наградами. С 1974 года в институте работает факультет общественных профессий (ФОП), который включает в себя следующие отделения: лекционно-пропагандистское, художественных профессий, а также спортивной и туристско-экскурсионной работы.

Неограниченные возможности предоставлены любителям спорта, которые в скором будущем получат свой собственный спортивный комплекс.

Ниже приводятся образцы вариантов вступительного письменного экзамена по математике и примеры задач устного экзамена по физике в МИУ в 1976 году.

Математика

Вариант 1

1. В треугольник вписан круг радиуса 4 *см*. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки длины 6 *см* и 8 *см*. Найти длины двух других сторон.

2. Решить неравенство

$$|x-6| > |x^2-5x+9|.$$

3. Решить уравнение

$$3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 7x)-\cos^2 2x+\sin^2 3x=0.$$

5. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z-\frac{\sin(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}.$$

Вариант 2

1. Длина высоты правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна H, боковое ребро и диагональ пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углами α и β. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

2. При каких значениях p система неравенств

$$-9<\frac{3x^2+px-6}{x^2-x+1}<6$$

удовлетворяется при всех действительных значениях x?

3. Решить уравнение

$$x^2\cdot\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4.$$

4. Решить уравнение

$$\sin 9x=2\sin 3x.$$

5. Вычислить без таблиц

$$\operatorname{tg} 9^\circ-\operatorname{tg} 27^\circ-\operatorname{tg} 63^\circ+\operatorname{tg} 81^\circ.$$

Вариант 3

1. Длины двух сторон треугольника равны a и b. Найти длину третьей стороны треугольника, если величина угла, лежащего против этой стороны, в два раза больше величины угла, лежащего против стороны b.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{0,1}(x^2+1)<\log_{0,1}(2x-5).$$

4. Решить уравнение

$$1+\cos t+\cos 2t+\cos 3t=0.$$

5. Доказать, что если $a+b\geqslant 1$, то имеет место неравенство $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$.

Физика

1. Грузик массой $m=30$ *г* прикреплен к концу невесомого стержня, который равномерно вращается в вертикальной плоскости вокруг другого конца, делая $n=5$ *об/сек*. Длина стержня $l=30$ *см*. Каково натяжение стержня, когда грузик проходит верхнюю и нижнюю точки своей траектории?

2. Два баллона, содержащие один и тот же газ, соединили трубкой с краном. В первом баллоне давление газа $p_1=8\cdot 10^5$ *н/м²*, во втором $p_2=6\cdot 10^5$ *н/м²*. Емкость первого баллона $V_1=3$ *л*, второго $V_2=5$ *л*. Какое давление (в *мм рт. ст.*) установится в баллонах, если открыть кран? Температура постоянна. Объемом трубки можно пренебречь.

3. Конденсатор емкостью $C_1=2$ *мкф* заряжен до напряжения $U_1=100$ *в*, а конденсатор емкостью $C_2=0,5$ *мкф* — до $U_2=50$ *в*. После зарядки конденсаторы соединили одноименными полюсами. Какое количество теплоты выделится в результате такого соединения?

4. Однослойная катушка, содержащая $N=1000$ витков провода, помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. Индукция магнитного поля равномерно изменяется со скоростью $|\overrightarrow{\Delta B}|/\Delta t=10^{-2}$ *тл/сек*. Радиус катушки $r=2$ *см*. К концам катушки подключен конденсатор емкостью $C=10$ *мкф*. Определить заряд на конденсаторе.

5. Светящаяся точка S находится на главной оптической оси рассеивающей линзы. Оптическая сила линзы $D=-2,5$ *дптр*, а расстояние от линзы до мнимого изображения точки равно 30 *см*. Где находится точка S? Построить ход лучей.

О. Михненков

Московский институт инженеров землеустройства

Московский институт инженеров землеустройства является единственным в стране специализированным высшим учебным заведением, которое готовит инженеров-землеустроителей, архитекторов по сельскому строительству и инженеров-геодезистов для сельского хозяйства. Институт является одним из старейших вузов страны, крупным научно-методическим центром по вопросам землеустройства, сельской архитектуры и геодезии в области сельского хозяйства.

В институте имеются три факультета: землеустроительный, архитектуры сельских населенных мест и инженерной геодезии.

Землеустроительный факультет является ведущим в институте. Он готовит инженеров-землеустроителей. Чем же привлекательна эта профессия?

Прежде всего надо сказать, что человек, посвятивший себя землеустройству, имеет дело с замечательной природой нашей страны, с ее большим и очень важным богатством — землей. Инженер-землеустроитель занимается отводами участков под строительство промышленных предприятий, крупных гидротехнических сооружений, шоссейных дорог и т. д., составляет проекты межхозяйственного и внутрихозяйственного землеустройства, разрабатывает мероприятия по мелиорации земель, борьбе с эрозией почв и другие.

Один из главных помощников землеустроителя — план или карта. Землеустроитель должен хорошо уметь составлять их, поэтому на первом курсе изучается геодезия. А чтобы знать, какова земля по качеству, что на ней лучше выращивать, можно ли посадить сад на том или ином участке, где надо посадить лесополосы, а где — проложить дороги, студенты изучают почвоведение, земледелие и растениеводство, основы животноводства, механизацию сельскохозяйственного производства, сельскохозяйственную мелиорацию и водоснабжение.

Факультет архитектуры сельских населенных мест был создан в 1965 году и готовит архитекторов по сельскому строительству.

В Программе КПСС намечены пути постепенного превращения колхозных деревень и сел в укрупненные населенные пункты городского типа с благоустроенными жилыми домами, коммунальным обслуживанием, бытовыми предприятиями, культурными и медицинскими учреждениями.

Архитектурным проектированием поселков, жилых и культурно-бытовых зданий, механизированных животноводческих и птицеводческих ферм и других производственных комплексов и занимаются выпускники факультета. На этом факультете изучают следующие специальные дисциплины: архитектурное проектирование, рисунок, историю искусств и архитектуры, строительную механику, конструкцию зданий и сооружений, технологию и организацию строительного производства, а также цикл инженерных и сельскохозяйственных дисциплин.

В процессе учебы студенты выполняют курсовые проекты и работы, а для прохождения производственной практики зачисляются на временную работу в проектные организации, где они выполняют реальные проекты для колхозов и совхозов.

Окончившие факультет распределяются в проектные институты по сельскому строительству, расположенные в столичных, краевых и областных центрах, а также работают районными архитекторами, осуществляя архитектурное руководство и контроль за строительством на селе.

Факультет инженерной геодезии готовит инженеров-геодезистов для сельского хозяйства. Специальность геодезиста — одна из наиболее древних и романтических. Геологи, гидротехники и другие специалисты, ведущие разведку необжитых земель, идут, как правило, с топографической картой в руках. Это значит, что на этих необжитых землях уже поработали геодезисты.

Инженер-геодезист отличается широтой познаний как в области наземных методов съемки, так и в области обработки снимков, полученных с летательных аппаратов.

Методы наземных топографических съемок изучаются в курсах геодезии, инженерной геодезии, высшей геодезии, полевой астрономии. При изучении основ фотографии и аэрофотосъемки, дешифрирования аэроснимков, фотограмметрии и инженерной фотограмметрии студенты осваивают наиболее прогрессивные и высокопроизводительные методы создания карт и планов.

В геодезии и фотограмметрии в последнее время широко используются новейшие достижения в области радиоэлектроники и вычислительной техники. Учебным планом предусматривается изучение специальных курсов радиоэлектроники и вычислительной техники.

Выпускники факультета направляются на работу в аэрофотогеодезические предприятия, в проектные институты по землеустройству и другие организации.

Некоторые из выпускников факультета участвуют в оказании помощи развивающимся странам, выполняя геодезические работы для сельскохозяйственных целей.

Поступающие в институт держат следующие экзамены:

на землеустроительный факультет и факультет инженерной геодезии — по математике (письменно и устно), физике (устно), русскому языку и литературе (письменно);

на факультет архитектуры сельских населенных мест — по рисунку (гипсовая голова и гипсовая архитектурная деталь), черчению (контурная ваза с заданными параметрами), математике (устно), физике (устно), русскому языку и литературе (письменно).

Ниже приводятся варианты письменных работ по математике в МИИЗ 1976 года.

Вариант 1

1. Упростить выражение ($x\neq0$, $x\neq2y$, $x\neq-2y$)

$$\frac{5x^2-10xy}{x^2+4y^2}:\frac{15x(x-2y)^2}{x^4-16y^4}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{1,5}\frac{2x-8}{x-2}<0.$$

3. Доказать тождество

$$1+\cos(\pi+3\alpha)\cos2\alpha-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)\sin2\alpha=2\sin^2\frac{5}{2}\alpha.$$

4. В правильной треугольной призме высота равна H, а диагональ боковой грани составляет с основанием угол α. Найти объем призмы.

Вариант 2

1. Упростить выражение

$$\frac{3}{2}-\left(\frac{(0,5x+1)x}{x^3-1}+\frac{1}{2-2x}+\frac{1}{x^2+x+1}\right)\times\frac{x^3+x^2+x}{x-1}.$$

2. Вычислить $\sin(\pi/3-\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$.

3. Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, если их произведение равно 64, а среднее арифметическое $\frac{14}{3}$.

4. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро длины a наклонено к плоскости основания под углом α. Найти объем пирамиды.

Вариант 3

1. Упростить выражение ($z\neq0$)

$$\left[\frac{\left(z^{\frac{2}{p}}+z^{\frac{2}{q}}\right)^2-4z^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}}}{\left(z^{\frac{1}{p}}-z^{\frac{1}{q}}\right)^2+4z^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

2. Доказать тождество

$$\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Решить неравенство

$$\log_2(x^2+2x)<3.$$

4. В равнобедренной трапеции острый угол при основании равен α, диагональ образует с основанием угол β и большее основание равно a. Найти высоту и боковую сторону трапеции.

Вариант 4

1. Упростить выражение

$$\left[(\sqrt{p}-\sqrt{q})^{-2}+(\sqrt{p}+\sqrt{q})^{-2}\right]:\frac{p+q}{p^2-q^2}.$$

2. Решить уравнение

$$25^{\sqrt{x-2}}-5\cdot5^{\sqrt{x-2}}-500=0.$$

3. Преобразовать в произведение

$$1+\cos(2\pi-2\alpha)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-4\alpha\right).$$

4. Основание прямой призмы — ромб с высотой h и острым углом α. Меньшая диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом β. Найти объем призмы.

А. Беликов, Г. Гинзбург

Курский политехнический институт

Курский политехнический институт расположен в центре перспективного промышленного района, развитие которого связано, прежде всего, с разработкой богатейшего месторождения железных руд — Курской магнитной аномалии. Освоение этого месторождения стало возможным сравнительно недавно в связи с появлением комплексов машин и оборудования, позволяющих вести добычу открытым способом после удаления слоя, покрывающего рудное тело.

Своим возникновением институт обязан также и развитию химической промышленности, в частности, производству синтетических материалов для изготовления тканей и трикотажных изделий.

В настоящее время институт ежегодно принимает на первый курс 1400 студентов и готовит инженеров по 14 специальностям.

Факультет автоматики и вычислительной техники готовит инженеров по проектированию и эксплуатации современных электронно-вычислительных машин и систем автоматического управления.

Машиностроительный факультет готовит инженеров по специальностям: технология машиностроения, технология и оборудование сварочного производства, обогащение полезных ископаемых, комплексная механизация открытой разработки месторождений полезных ископаемых. Выпускники этого факультета направляются на работу на машиностроительные заводы, крупные стройки магистральных трубопроводов, обогатительные фабрики, проектные и конструкторские институты.

Строительный факультет готовит инженеров-строителей по основным строительным специальностям: промышленное и гражданское строительство, сельскохозяйственное строительство, водоснабжение и кана-

лизация, газотеплоснабжение и вентиляция. Выпускники этого факультета работают на стройках и в проектных институтах.

Механико-технологический факультет готовит инженеров-технологов для легкой промышленности, перерабатывающей натуральное шерстяное и синтетическое волокна, по специальностям: прядение натуральных и химических волокон, технология химической отделки тканей, трикотажное производство, машины и аппараты текстильной промышленности. Выпускники этого факультета работают на предприятиях текстильной и трикотажной промышленности, в конструкторских и технологических бюро научно-исследовательских институтов.

Ниже приводятся варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике 1976 года.

Математика

Вариант 1

1. В прямоугольном параллелепипеде одно из ребер основания имеет длину a и образует угол α с диагональю параллелепипеда и β с диагональю основания параллелепипеда. Найти объем параллелепипеда.

2. Решить неравенство

$$\log_3(x^2-2x)\geqslant 1.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 2x = 1+\cos 4x.$$

4. Решить уравнение

$$x=\sqrt{3x+7}-1.$$

Вариант 2

1. Около шара радиуса R описан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Определить полную поверхность конуса.

2. Решить уравнение

$$\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18.$$

3. Доказать тождество

$$\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sec 2\alpha.$$

4. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{(7x-x^2-10)\lg^2(11-x)}.$$

Вариант 3

1. В шар радиуса R вписана четырехугольная пирамида, боковые ребра которой составляют с высотой пирамиды угол α. Определить объем пирамиды, если в ее основании лежит прямоугольник с углом β между диагоналями.

2. Решить уравнение

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6.$$

3. Доказать тождество

$$\sin^2(\alpha-\beta)-\cos^2\beta+$$
$$+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\alpha.$$

4. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{(x^2-12x+32)\lg^2(6-x)}.$$

Физика

1. Пуля, летящая со скоростью 400 *м/сек*, попадает в земляной вал и проникает в него на глубину 20 *см*. Сколько времени двигалась пуля внутри вала? С каким ускорением? Какова была ее скорость на глубине 10 *см*? Движение считать равнопеременным.

2. Вагон идет по закруглению радиуса 800 *м* со скоростью 72 *км/час*. Расстояние между рельсами равно 1,68 *м*. Определить, на сколько должен быть выше внешний рельс по сравнению с внутренним, чтобы вагон не перевернулся?

3. Шар массой 1 *кг* подвешен на нити. В шар произведен выстрел в горизонтальном направлении, и пуля застряла в шаре. Определить высоту, на которую поднимается откачнувшийся шар, если масса пули 10 *г*, а скорость пули 400 *м/сек*.

4. Перед тактом сжатия давление в цилиндре двигателя внутреннего сгорания равно 0,8 *атм*, а температура 50°C. Определить температуру смеси в конце такта сжатия, если при этом объем ее уменьшился в 5 раз, а давление увеличилось до 7 *атм*.

5. Кусок железа массой 2 *кг*, нагретый до 750°C, погружен в 1,8 *кг* воды при температуре 25°C, при этом вся вода нагрелась до 100°C, и часть ее испарилась. Определить массу испарившейся воды.

6. Для нагревания 2 *л* воды, находившейся в алюминиевой кастрюле массой 400 *г*, от 15°C до 75°C было израсходовано в примусе 30 *г* керосина. Определить коэффициент полезного действия примуса, полагая, что теплота, пошедшая на нагревание сосуда с водой, является полезной. Как изменится результат, если полезной считать теплоту, пошедшую на нагревание воды?

7. Электрон движется в электрическом поле из точки, в которой потенциал равен 600 *в*. Найти потенциал той точки поля, в которой электрон остановится, если начальная скорость электрона равна $10\cdot 10^6$ *м/сек* и направлена вдоль силовой линии поля.

8. Найти внутреннее сопротивление и э. д. с. батареи аккумуляторов, если при сопротивлении внешней цепи 2 *ом* ток равен 0,8 *а*, а при сопротивлении 3 *ом* — 0,6 *а*.

9. Какой должна быть длина активной части проводника, движущегося в магнитном поле с индукцией 0,8 *тл* перпендикулярно направлению магнитных линий со скоростью 10 *м/сек*, чтобы в проводнике индуцировалась э. д. с., равная 8 *в*?

10. На каком расстоянии надо поставить свечу перед вогнутым зеркалом, фокусное расстояние которого равно 10 *см*, чтобы получить действительное изображение пламени, увеличенное в 4 раза? На каком расстоянии от зеркала надо поместить свечу, чтобы изображение получилось мнимым при том же увеличении?

А. Боцу, В. Зрайченко, Е. Коваленок

Немного об экзаменах

Эти «советы» экзаменующемуся основаны на опыте студентов Московского физико-технического института. Они были напечатаны в газете «За науку». Редакция решила перепечатать заметку, полагая, что советы заинтересуют будущих абитуриентов.

Классификация

Экзамены различаются в зависимости от предмета, по которому их сдают (например, по физике, математике, английскому языку и др.) и от вида этих экзаменов (вступительные, выпускные, жизненные и др.).

Чтобы экзамены производили возможно большее впечатление, их объединяют в так называемые сессии.

Кроме того, экзамены могут протекать в двух формах: письменной и устной. О них по порядку.

Письменный

Вопрос о сдаче экзамена распадается на три подвопроса.

1. Как написать работу, чтобы ее оценили как можно выше.

2. Как извести дежурного преподавателя.

3. Как и чем лучше пользоваться на экзамене.

Первый вопрос изучен достаточно хорошо почти всеми, поэтому писать о нем нет необходимости, третий не печатается по особым соображениям.

Остается рассмотреть второй вопрос. Он требует творческого подхода и предоставляет фантазии любого человека неограниченные возможности. Наиболее интересны, конечно, новые способы, поскольку старые уже изучены экзаменаторами.

Вот одно из оригинальных решений. Выберите себе в аудитории место, доступ к которому наиболее труден (далеко от прохода, малое расстояние между рядами, толстый сосед и т. п.). Минут через двадцать после начала экзамена, когда преподаватель развернет свежий номер газеты, поднимите руку (только не делайте этого первым, а то он вас запомнит). Когда он, наконец, доберется до вашего места, извинитесь и скажите, что вопрос выяснился сам собой. Последующие действия требуют определенной тактики. Задавайте дежурному преподавателю любые вопросы, начиная с неясно напечатанной буквы или нечетко сформулированного условия задачи и кончая тем, когда и сколько раз можно выходить и куда нужно идти. Будьте уверены, что через некоторое время он будет стараться вас не замечать. Теперь спокойно списывайте работу.

Устный

Устные экзамены заслуживают внимания не менее письменных. После того как были опубликованы «Советы экзаменатору» (см. «Физики продолжают шутить», изд-во «Мир», 1968, с. 103), сдавать их стало еще труднее. Поэтому мы предлагаем несколько правил, которые могут облегчить абитуриентам сдачу устных экзаменов.

Советы экзаменующемуся

1. Прежде всего дайте экзаменатору понять, что ваша будущая карьера, а также личная жизнь мало зависят от его оценки ваших знаний. Поставьте его на место с самого начала.

2. С вашим экзаменатором будьте приветливы, но сдержанны. Других экзаменаторов просто не замечайте. Не старайтесь услышать вопросы, задаваемые другим абитуриентам: если вы можете ответить на них, у вас возникнет излишняя уверенность в себе, если нет — неуверенность, а между тем, к вам они не имеют ни малейшего отношения.

3. Заставьте экзаменатора понять (или хотя бы принять) ваш метод, особенно, если этот метод необычен. Это отвлечет экзаменатора от посторонних размышлений и заставит смотреть не только на ответ, но и на решение.

4. Если у вас хорошая память, не показывайте этого экзаменатору. Выводите все, что можно вывести. Особенно хорошее впечатление производит получение формулы

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

из разложения второй степени бинома с доказательством последнего по индукции и вычислением первых десяти коэффициентов.

5. Избегайте слов: «из школьного курса известно...» или «в институте это изучают более подробно...». Школьный курс экзаменатор давно забыл, а в институте, как может оказаться, преподает недавно, может быть, даже по совместительству, поэтому программу изучить еще не успел. Вообще избегайте ссылок. Даже если задача проста, а ее решение есть во всех учебниках, подумайте полминуты и отвечайте так, будто вас только что осенило.

6. Не спрашивайте экзаменатора, что он вам поставил. С улыбкой попрощайтесь и покиньте аудиторию. Если вам сказано ждать результатов за дверью, не стойте около нее. Сходите в буфет. Это упрочит всеобщее мнение, что экзамен для вас — не самое важное в жизни, и увеличит уважение к вам.

И. Калашникова, А. Веденеев

Из творческого наследия Козьмы Пруткова

Внимательное ознакомление с произведениями Козьмы Пруткова позволило автору настоящей публикации выдвинуть смелую гипотезу о том, что известный сатирик был еще и талантливым ученым, во многом предвосхитившим развитие физики и математики. По ряду причин он возвестил миру о предугаданных им идеях и тенденциях не в явной, а в замаскированной форме. Мы ограничимся приведением материалов, относящихся к физике и подтверждающих нашу гипотезу. Публикация этих материалов приурочена нами к приближающемуся 175-летию со дня рождения К. Пруткова (1803—1863). Эпиграф к публикации навеян стихами Фаддея Кузьмича Пруткова — талантливого сына гениального отца.

Исполняется 175 лет со дня рождения Пруткова.
Это, можно сказать, праздник науки и культуры.
Однако даже многим ученым невдомек,
Сколь велик его вклад в развитие разных наук.



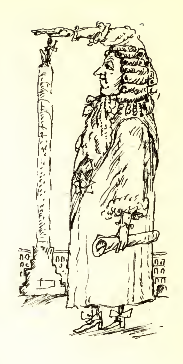
Пространство. Время. Относительность

Часами измеряется время, а временем жизнь человеческая; но чем, скажи, измеришь ты глубину Восточного океана? *)

---

*) Курсивом здесь и далее набраны выдержки из произведений, действительно принадлежащих Козьме Пруткову. (*Прим. автора публикации.*)

Комментарий. Постановка вопроса едва ли не важнее его решения, и данный афоризм подтверждает это наблюдение. Наука ответила на риторический вопрос Пруткова: глубины океанов следует измерять в метрах, в соответствии с принятой ныне Международной системой единиц (СИ).



●

Самый отдаленный пункт земного шара к чему-нибудь да близок, а самый близкий от чего-нибудь да отдален.

Комментарий. В данном афоризме четко высказана идея относительности пространства. Не останавливаясь на очевидном развитии этой идеи в рамках релятивистской теории, укажем, что этот афоризм, видимо, породил следующее заключение, вложенное знаменитым французским писателем Анатолем Франсом в уста Рике, собачки г-на Бержере — героя «Современной истории»: «Люди, животные и камни растут, приближаясь, и становятся огромными, когда они около меня. Я же не меняюсь. Где бы я ни был, я всегда одинаково велик».

●

Ничего не доводи до крайности: человек, желающий трапезовать слишком поздно, рискует трапезовать на другой день поутру.

Комментарий. В данном афоризме четко высказана идея относительности времени (см. комментарий к предыдущему афоризму). Стоит подчеркнуть также, на примере комментируемого афоризма, влияние К. Пруткова на последующие поколения сатириков. В «Двенадцати стульях» Ильфа и Петрова находим сходное наблюдение, высказанное Остапом Бендером: «В Берлине есть очень странный обычай: там едят так поздно, что нельзя понять, что это — ранний ужин или поздний обед».



●

«Зачем, — говорит эгоист, — стану я работать для потомства, когда оно ровно ничего для меня не сделало?» — Несправедлив ты, безумец! Потомство сделало для тебя уже то, что ты, сближая прошедшее с настоящим и будущим, можешь по произволу считать себя: младенцем, юношей и старцем.

Комментарий. Здесь вновь идет речь об относительности времени. Нам кажется уместным привести новонайденный рассказ К. Пруткова, обнаруженный в его бумагах:

«На приеме у генерал-губернатора N оказался я рядом со своим товарищем по пансиону и, оглядев его пристально, не преминул поинтересоваться, почему он столь грустен.

— Как же мне не печалиться, — возразил последний на мой вопрос. — Не далее как неделю назад похоронил я своего бедного батюшку, и горькая мысль о том, как плохо устроена жизнь, бле-



снула в моем воспаленном мозгу: сначала умирают наши деды, потом — родители, а потом и мы сами!

— Несправедлив ты, о друг мой, — энергично возразил я свидетелю и участнику моих юношеских игр и утех. — Жизнь, напротив, отменно прекрасна: сначала молоды мы сами, потом — наши дети, а затем и внуки!

Магическое действие, оказанное на старого товарища этой осенившей меня идеей, немедленно отразилось на его невыразительном, но повеселевшем лице».

●

«Чиновник! окажи мне дружбу;
Скажи, куда несешься ты?» — «На службу!»
«Зачем не следуешь примеру моему,
Сидеть в спокойствии? признайся напоследок!»
Чиновник, курицу узревши этак
Сидящую в лукошке, как в дому,
Ей отвечал: «Тебя увидя,
Завидовать тебе не стану я никак;
Несусь я, точно так,
Но двигаюсь вперед; а ты несешься сидя!»

Комментарий. В басне с очевидностью вводится представление об относительности скорости. Достойна специального внимания идея рассмотрения событий в движущихся друг относительно друга системах координат, далеко выходящая за пределы принципа относительности Галилея.

●



Известно, что с пространственно-временными соотношениями тесно связаны причинно-следственные. Последние бегло затрагивались Прутковым в афоризме:

Щелкни кобылу в нос — она махнет хвостом.

Проблемы причинно-следственных связей живо обсуждаются физиками в связи с гипотезой о существовании тахионов — частиц, движущихся в пустоте со сверхсветовой скоростью. Оказывается, возможность таких движений не отвергается специальной теорией относительности (и ее творцом). Трудности здесь лежат как раз в проблеме причины и следствия.

Можно думать, что именно тахионы стояли перед мысленным взором Козьмы Пруткова, когда он формулировал глубокий афоризм, найденный нами недавно в его тетради и высказанный емкой и звучной латынью:

«Cogitatu, ergo sunt»,

то есть

«Мыслимы — значит, существуют».

Уместно напомнить, что Прутков высоко ценил Декарта, наиболее, пожалуй, известного широким кругам читателей созвучным афоризмом:

«Cogito, ergo sum»,

то есть

«Мыслю — значит, существую».

Новонайденный афоризм Пруткова блестяще разрешает не только проблему тахионов, но и подводит прочный научный фундамент под вопросы финансирования столь дорогостоящих поисков единичного магнитного заряда — монополя Дирака, кварков и других объектов.



Астрономия

Человек! возведи взор свой от земли к небу,— какой, удивления достойный, является там порядок!

Комментарий. Объективности ради надо отметить, что плоды раздумий К. Пруткова не всегда приводили к правильным заключениям, а иногда порождали ложные следствия. Так, приведенное наблюдение о расположении звезд в «удивления достойном порядке» (вполне справедливое и тонкое) послужило, видимо, поводом для такого утверждения (принадлежащего неизвестному теологу): «Божественное происхождение всего сущего вытекает из того, что любые три звезды, не расположенные на одной прямой, занимают вершины треугольника».

Квантовая механика

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.

Комментарий. Хорошо известно, что в 1924 году французский физик Луи де Бройль высказал предположение, что движению тела массы m со скоростью v может быть сопоставлен волновой процесс, характеризующийся длиной волны λ. Связь между этими дополняющими друг друга характеристиками физического объекта (корпускулярными и волновыми) выражается знаменитой формулой де Бройля: $\lambda = \frac{h}{mv}$ (h — постоянная Планка). Представляется несомненным, что именно эти соображения занимали К. Пруткова в его экспериментальном исследовании, нашедшем отражение в комментируемом афоризме. Непредвзятый ум, вооруженный знанием современной квантовой механики, не может не усмотреть в этом афоризме прямого предвосхищения независимо высказанных позднее взглядов де Бройля. В афоризме Козьмы Пруткова содержится также призыв к дальнейшим размышлениям о каменно-круговом (читай — корпускулярно-волновом) параллелизме, быть может, как раз и услышанный французским ученым.



Публикацию подготовил В. Френкель

Список читателей, правильно решивших задачи из «Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М391—М405, Ф403—Ф422. Жирные цифры после фамилий — две последние цифры номеров решенных задач.

Математика

Мы не включали в список фамилии читателей, правильно решивших задачу **М393**. Остальные задачи правильно решили: *С. Абаджян* (с. Дараков ГрССР) **92, 97, 00в), 01, 02, 04**; *З. Аббасов* (Ордубад) **01**; *Г. Аветисян* (пос. Анаран АрмССР) **97**; *В. Акопян* (Ленинакан) **01, 02, 04**; *С. Акопян* (Ереван) **01, 02, 04**; *Д. Алиев* (Ташкент) **96, 99**; *Б. Амосов* (Мытищи) **91, 92, 94а), б), 95а), б), 96, 97, 00а), г), 01—04**; *В. Ансоткин* (Ленинград) **01, 03, 04**; *С. Антонов* (Киев) **94а), б), 95а), 96, 97, 01, 02**; *Б. Аронов* (Саратов) **96, 01—04, 05а)**; *В. Асенова* (НРБ) **01—03**; *В. Атамась* (с. Худяки Черкасской обл.) **91**; *О. Бабаев* (Нахичевань) **91, 01**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **97, 00в), 01—03**; *П. Баньковский* (Уральск) **92, 01, 04**; *В. Беняш-Кривец* (Новогрудок) **97, 01, 02**; *А. Бер* (Ташкент) **92, 96, 97, 02, 03**; *М. Бествина* (СФРЮ) **01—03**; *П. Билер* (ПНР) **91, 92, 94а), б), в), 95а), б), 97, 99, 00в), г), 01—03**; *И. Биргер* (Киев) **96, 97, 00г), 01, 02**; *И. Бирюков* (Покров) **97**; *И. Блиадзе* (Тбилиси) **94б), 96, 97, 00в), г), 01, 02, 04**; *Б. Блок* (Москва) **92, 95а), б), в), г), 96, 97, 98б), 99, 00в), г), 01—04, 05б), в)**; *А. Бобылев* (Днепропетровск) **91**; *В. Бондаренко* (Тростянец) **97. 02, 03**; *Н. Бондаренко* (Ленинград) **94б), 01, 02, 04**; *В. Бугаенко* (Киев) **92, 01—04**; *Е. Бурлакова* (Асбест) **97**; *И. Вайсбурд* (Томск) **97, 01—03**; *Н. Великороссов* (Конаково) **01, 05а), б)**; *В. Виниченко* (пос. Октябрьское Крымской обл.) **97**; *Ю. Волков* (Саратов) **02**; *А. Ворович* (Москва) **92, 02, 03**; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) **95а), 96, 97, 00в), г), 01—03, 05а), б)**; *Д. Гаджиев* (Тбилиси) **01**; *Я. Гаек* (ЧССР) **97**; *Я. Гангл* (ЧССР) **92, 94б)**; *Л. Гандельсман* (Ленинград) **92, 95а), б)**; *А. Гарнаев* (Таллин) **97, 99, 01—03**; *А. Гатилов* (Воронеж) **01—03**; *П. Гержой* (Москва) **01—04, 05а), б)**; *И. Гершенгорин* (Харьков) **01—03, 05а), б)**; *Б. Гисин* (Ленинград) **91, 92, 94а), б), 96, 97, 98б), 00в), г), 01—04, 05а), б)**; *Е. Глезин* (Ленинград) **91, 92, 94а), 96, 97, 98б) 00в),01—04, 05а), б)**; *Ю. Голембиовский* (Ворошиловград) **01, 02**; *Д. Гольденберг* (Ленинград) **01**; *Т. Гольдштейн* (Харьков) **01**; *Е. Гордиенко* (Кишинев) **92, 02**; *К. Горнин* (Кременчуг) **97**; *С. Гришечкин* (Москва) **91, 92, 96, 97, 00в), г.), 01—04, 05а), б), в)**; *Н. Грищук* (Москва) **92**; *В. Гроссман* (Одесса) **91, 92, 94б), в), 02**; *М. Грунтович* (д. Н. Двор Гродненской обл.) **97, 01—04**; *С. Губанов* (Ворошиловград) **92, 04б), 00в), г), 01—03**; *С. Гузовский* (Рига) **01**; *А. Даниелян* (Ленинакан) **01, 05а), б)**; *А. Демидов* (Москва) **01, 03**; *А. Дзагоев* (Тбилиси) **01**; *А. Диденко* (Краснодар) **43**; *В. Дмитренко* (Киев) **94а), б), 96, 97, 99**; *В. Дмитриенко* (Киев) **02**; *С. Досмаганбетов* (Алма-Ата) **97, 01**; *До Тхе Лынг* (Вьетнам) **97**; *В. Дроздов* (Рязань) **92**; *О. Евдокимов* (Ленинград) **97, 01, 02**; *Е. Евстратов* (Ангарск) **97, 01—03**; *А. Егоян* (Тбилиси) **97, 01—03**; *А. Елизаров* (Москва) **01—04, 05а), б), в)**; *А. Ефашкин* (Оренбург) **01—04**; *Заложенков* (Семипалатинск) **01**; *И. Замаховская* (Ташкент) **02**; *И. Захаревич* (Ленинград) **96, 97, 01, 03, 04**; *А. Зейфман* (Рязань) **02**; *В. Зелик* (Симферополь) **97**; *Л. Зильберман* (Москва) **02**; *И. Зорин* (Кривой Рог) **02, 03**; *Р. Измайлов* (Баку) **97, 01—03, 05а), б), в)**; *С. Исаков* (Пермь) **01, 04, 05б)**; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) **01**; *И. Калика* (Киев) **01, 02, 05а), б)**; *Б. Каплан* (Киев) **91, 92, 94а), б), 96, 97, 00в), 01—03**; *А. Карпов* (Ленинград) **92, 02**; *В. Карташев* (Елец) **01, 02, 04**; *В. Каскевич* (д. Н. Двор Гродненской обл.) **97, 01—04**; *А. Касянчук* (Николаев) **91, 92, 94а), в), 96, 97, 98б), 99, 00г), д), 01—03, 05а), б)**; *А. Кириллов* (Ленинград) **91, 92, 95а), б)**; *В. Книжник* (Москва) **96, 97, 01—04, 05а), б), в)**; *А. Князюк* (Киев) **01—04, 05а), в)**; *В. Кобельков* (Мстёра) **03**; *Л. Кобесашвили* (Вале) **01**; *С. Козявкин* (Киев) **92, 96, 97**; *О. Конников* (Симферополь) **97, 01—03**; *Л. Корельштейн* (Москва) **91, 92, 95а), б), в), г), 96, 97, 00в), 01—04, 05а), б), в)**; *С. Корчанов* (Ангарск) **97, 02**; *В. Костусяк* (Запорожье) **02,03**; *А. Кулеско* (Донецк) **91, 97, 00в), г), 01, 02, 04, 05а)**; *М. Кутернин* (Алма-Ата) **01—04**; *С. Лавренченко* (Москва) **92, 96, 97, 02—04, 05а), б)**; *Е. Лаврова* (Ленинград) **92, 96, 97, 00в), 01, 02, 04**; *Г. Левко* (с. Верхняя Стинава Львовской обл.) **01**; *Р. Леманн* (ГДР) **91, 92**; *А. Липчанский* (Саратов) **02, 05а)**; *И. Лозицкий* (Гаицевичи) **97, 01, 02**; *Л. Любенов* (НРБ) **01**; *С. Майский* (Москва) **97, 01, 02**; *М. Манелис* (Киев) **95а), б), в), 97, 05а)**; *А. Манченко* (Фрунзе) **01**; *В. Медведь* (Молодечно) **01, 02**; *Б. Мерсон* (Рига) **01—03**; *Д. Миндлин* (Ташкент) **96, 97, 02, 05а), в)**; *А. Мирлин* (Ленинград) **01—04**; *А. Мкртчян* (Ленинакан) **01—04, 05а), в)**; *Г. Мойсевич* (Одинцово) **97**; *А. Молев* (Горький) **01, 02**; *А. Мошонкин* (Кирово-Чепецк) **96, 97, 00в), г), д), 01—03, 05а), б)**; *И. Муллагулов* (Уфа) **01—03**; *М. Мымрикова* (Мукачево) **02**; *А. Набутовский* (Новосибирск) **92, 02**; *Н. Наймак* (Николаев) **96, 97, 01, 02, 05а)**; *М. Народицкий* (Куйбышев) **91, 92, 94а), б), в), 00в), г), 02—04, 05а), б)**; *Б. Наткович* (Тбилиси) **97, 01**; *Е. Негашев* (Каменск-Уральский) **97**; *В. Нейман* (Ленинград) **92, 96, 97, 99, 00в)**; *А. Неугодников* (Каменск-Уральский) **97**; *Я. Николешвили* (с. Варкетили ГрССР) **97**; *Г. Николов* (НРБ) **97, 03**; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) **92, 93, 97, 98б), 99, 00в), г), 01—03**; *О. Огилько* (с. Михайловка Целиноградской обл.) **94б)**; *А. Осьманов* (с. Каролаш МССР) **01**; *Д. Папуш* (Харьков) **96, 97, 00в), г), д), 01, 02, 05а), б)**; *Д. Патарая* (Тбилиси) **01, 03**; *И. Пашин* (Темиртау)

02; *А. Петухов* (Новосибирск) **91**, **92**, **01—04**, **05а**), **в**); *П. Побылица* (Ленинград) **91**, **92**; *С. Полыгалов* (Пермь) **97**, **99**; *А. Попов* (Чусовой) **97**; *Л. Попов* (Астрахань) **97**, **01**; *С. Путинцев* (Краснодар) **91**, **92**; *А. Рабинович* (Харьков) **01**, **02**; *А. Разборов* (Москва) **91**, **92**; *В. Решетов* (Троицк) **91**, **94б**); *В. Рогава* (Тбилиси) **02**; *А. Родников* (Москва) **95а**), **б**), **в**), **г**); *С. Ронкин* (Симферополь) **01**, **02**; *К. Садыкова* (Ташкент) **02**, **04**; *Г. Салахлы* (с. Сарачло ГрССР) **01—03**; *М. Салахлы* (с. Сарачло ГрССР) **01**, **03**; *Д. Самощенко* (Свердловск) **97**; *В. Сафонов* (Грозный) **97**, **01**; *В. Свиридов* (Воронеж) **92**, **03**; *Р. Севдималыев* (Шанфлин Аз. ССР) **97**, **01**; *М. Селектор* (Ленинград) **91**, **92**, **95а**), **б**), **в**), **97**, **98б**), **99**, **00в**), **г**), **01**, **02**, **04**; *А. Сердюк* (Херсон) **97**, **01**; *П. Сильвестров* (Новосибирск) **02**, **03**; *В. Смолко* (Кишинев) **92**; *М. Соколовский* (Москва) **92**, **94а**), **б**), **96**, **01—03**; *А. Соловьев* (Ульяновск) **97**; *В. Спинеев* (Ворошиловград) **97**; *В. Стовба* (Москва) **92**, **94б**), **95а**), **б**), **в**), **г**), **96**, **97**, **98б**), **99**, **00в**), **г**), **01—03**; *И. Стойменович* (СФРЮ) **01—03**; *О. Тен* (Краснодар) **01—04**; *Н. Тренев* (Москва) **92**, **97**, **01**, **02**, **05б**); *Н. Трифонов* (Канск) **05б**); *В. Трофимов* (Москва) **91**, **94а**), **б**), **96**, **97**, **01—04**; *В. Угриновский* (Хмельник) **92**, **97**, **01—03**; *В. Фалько* (Харьков) **97**, **01**, **02**; *С. Фомин* (Новоград-Волынский) **01—03**; *Л. Хаит* (Могилев-Подольский) **97**; *С. Харенко* (Ангарск) **97**, **01—03**; *И. Хаучл* (ЧССР) **96**, **97**; *И. Царьков* (Москва) **97**, **00в**), **01**; *А. Чичинин* (Новосибирск) **01**, **02**, **04**; *А. Шафир* (Челябинск) **02**; *К. Шахназарян* (Баку) **92**, **97**; *О. Шейдвассер* (Оренбург) **01**, **02**; *А. Шкуропатов* (с. Яншабад Ташкентской обл.) **02**; *Е. Шмуклер* (Москва) **01**, **02**, **04**; *В. Шпильрайн* (Москва) **04**; *Ю. Штейншрайбер* (Баку) **96**, **97**, **00в**), **01**, **02**; *В. Штепин* (Челябинск) **91**, **94б**), **95а**), **б**); *С. Штернин* (Ленинград) **02**, **03**; *В. Шумилов* (Череповец) **92**; *В. Щукин* (Ленинград) **96**, **97**, **98б**), **99**, **00г**), **01—04**, **05а**), **б**); *Л. Энтин* (Москва) **91**, **92**, **94а**), **96**, **97**, **98б**), **00в**), **г**), **01—03**; *А. Юрков* (с. Романовка Красноярского края) **01—04**; *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой обл.) **97**, **01**, **02**.

Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф405**, **Ф407** и **Ф417**. Остальные задачи правильно решили: *Е. Абель* (Москва) **18—22**; *А. Абрамян* (Ереван) **4**, **13**, **14**, **21**, **22**; *У. Аллаяров* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **19**; *Б. Амосов* (Мытищи) **14**, **18—21**; *В. Андреев* (д. Автухты Витебской обл.) **19**; *О. Аныщкова* (Винница) **5**, **10**, **19**; *А. Атамуратов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **18**, **21**; *М. Багаутдинов* (Магнитогорск) **4**, **10**, **18**, **20**, **22**; *Ф. Багдасарян* (Баку) **8**, **10**, **11**, **14**, **16**, **19**, **20**; *А. Багиров* (с. Кировка АзССР) **19**; *В. Бакаев* (Орск) **20**; *К. Балашев* (д. Клишева Московской обл.) **8—11**; *Ю. Балашов* (Москва) **4**; *О. Баркалов* (п. Черноголовка Московской обл.) **19**; *А. Барташ* (Симферополь) **8**; *О. Батищев* (Череповец) **4**, **8**, **11—15**, **18**, **19**; *А. Беликов* (Москва) **4**, **10**, **18**, **19—22**; *О. Березюк* (Челябинск) **18**, **20**; *Г. Бетин* (с. Счастливцево Херсонской обл.) **3**, **4**; *П. Билер* (Вроцлав ПНР) **4**, **8**, **16**, **19**; *А. Бобров* (Пермь) **3**, **4**, **8**, **10**, **13—15**, **18—20**; *А. Бобылев* (Днепропетровск) **6**; *В. Боднарюк* (с. Стрелецкий Кут Череповецкой обл.) **4**; *Т. Болтуруков* (с. Тюп КиргССР) **11**; *В. Бондаренко* (Тростянец Сумской обл.) **19**; *И. Вайсбурд* (Томск) **8**, **14**, **19—21**; *В. Варлыгин* (Москва) **8**; *П. Вахрушев* (Навои) **8**; *В. Ващенко* (Туапсе) **3**, **8**, **10**, **14**; *Н. Великороссов* (Конаково) **19**; *Я. Виннишин* (Туапсе) **14**, **18—20**, **22**; *В. Вирясов* (Павлоград) **4**, **8**, **19**; *А. Вишневский* (Бердичев) **18**; *Л. Водоватов* (Москва) **19**, **21**; *Д. Воробьев* (Киев) **13**, **14**, **16**; *П. Воронин* (Рига) **19**; *В. Гаврилов* (Орск) **18—21**; *Н. Газда* (п. Клевань Ровенской обл.) **8**, **9**, **11**, **18—20**; *И. Газизов* (Москва) **3**, **4**; *И. Гарибашвили* (Тбилиси) **18—22**; *В. Гаркавый* (Лида) **4**, **6**, **8—11**, **18—22**; *В. Гармаш* (Запорожье) **8**, **10**, **11**, **13—15**, **18—22**; *А. Гербин* (Ленинград) **21**; *М. Глазунов* (Старый Оскол) **8**; *О. Глушко* (Москва) **6**, **8—10**, **13**, **14**, **18—20**; *И. Головин* (Тула) **19**; *Э. Гологорский* (Кишинев) **14**, **19**, **21**; *О. Голощапов* (с. Архангельское Тульской обл.) **8**, **9**, **11**, **21**; *Е. Гордиенко* (Кишинев) **8**, **14**, **18**, **20—22**; *Е. Горюнова* (Петропавловск-Камчатский) **8**; *А. Готовиков* (с. Кубенское Вологодской обл.) **18—20**; *А. Грайфер* (Запорожье) **6**, **8**, **10**, **14**; *Б. Грибов* (Воронеж) **13**, **18**, **19**, **21**, **22**; *И. Гузов* (Москва) **4**; *В. Демидович* (Гадяч) **20**; *П. Демкин* (Донецк) **4**, **14**, *О. Денисов* (Баку) **4**, **10**, **11**; *В. Дроздов* (Рязань) **19**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **18**; *В. Ерофеев* (Новосибирск) **8**, **9**, **11**, **18**, **19**, **21**, **22**; *К. Жангозин* (Караганда) **8**, **19**, **20**; *И. Жарекешев* (Алма-Ата) **18**, **21**; *В. Житарь* (Кишинев) **4**, **9**; *В. Жуков* (Абаза) **19**; *М. Жуков* (Москва) **14**; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) **4**, **6**, **8**, **10**, **11**, **13—16**, **18—22**; *А. Захаров* (Брест) **4**, **10**, **19**; *Е. Зильберберг* (Винница) **10**; *В. Зильберг* (Новгород) **4**, **8**, **10**, **19**; *Н. Землянигин* (Борский р-н Горьковской обл.) **4**; *А. Измайлов* (Зеленодольск ТАССР) **15**, **18—22**; *Г. Измайлов* (Баку) **4**; *А. Ильин* (Грозный) **4**; *А. Иоаннисян* (Ереван) **8**; *А. Исавердиев* (Баку) **4**; *С. Исаков* (Пермь) **19**, **20**; *В. Казак* (Ровно) **8—10**, **12**; *Е. Казарова* (Ереван) **18**, **19**; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) **14**, **18—21**; *А. Каланович* (Пермь) **3**, **4**, **6**; *А. Калинин* (Пермь) **19**, **20**; *А. Катасонов* (Дрезна) **13**, **14**; *В. Катин* (Дуагавпилс) **4**; *А. Квиташвили* (Тбилиси) **18**, **19**, **21**; *М. Кирсанов* (Тула) **4**, **6**, **10**, **13**, **14**, **16**, **18—21**; *И. Кисель* (Кролевец) **4**; *С. Клейман* (п. г. т. Луков Волынской обл.) **19**; *Ю. Кобылинский* (Севастополь) **14**; *В. Кокоц* (Липецк) **20**; *В. Комов* (Александров) **14**, **19—21**; *И. Кондрашкин* (Ленинград) **6**; *А. Кононов* (Саратов) **19—21**; *Г. Корионов* (Москва) **14—16**, **19**, **21**; *К. Корнев* (п. Билибино Магаданской обл.) **14**, **18**; *В. Коробов* (Саратов) **18**; *В. Коротков* (Джамбул) **18**; *В. Коток* (Харьков) **8**, **10**, **13**, **14**; *И. Костенко* (Сумы) **8**, **11**, **14**, **18—20**, **22**; *В. Костур* (Киев) **18**, **19**; *А. Краджян* (Ереван) **19**, **21**; *А. Кречетников* (Сумы) **19**; *В. Кузьменко* (Чернигов) **8**, **14**, **20**, **21**; *Г. Куликова* (Егорьевск) **10**; *А. Куприн* (Москва) **14**,

18, 20, 21; *Л. Куравский* (Калуга) 8, 10, 18, 19; *М. Курбатов* (Москва) 4, 6, 8—12, 18—22; *Е. Курмангалиев* (Уральск) 4, 6; *С. Лавренченко* (Москва) 4, 14, 18, 19, 21; *В. Лашкин* (Киев) 15, 19; *А. Листовничий* (Киев) 8, 18—20, 22; *Ю. Литвинович* (п/о Ситница Брестской обл.) 8, 18, 19, 21, 22; *О. Лищенко* (Киев) 3, 4, 6, 8—11, 13—16, 18—22; *В. Лобзин* (Свердловск) 3, 6, 8, 10—15, 18—21; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) 4, 9, 10, 18, 19; *Л. Лознер* (Минск) 3, 13, 14, 18—21; *В. Лубневский* (Москва) 4; *С. Ляхимец* (Киев) 14; *А. Магадеев* (д. Карачаево БашкАССР) 19; *С. Майский* (Москва) 4, 8, 19, 21; *В. Малинин* (Нижний Тагил) 4, 8, 10, 19—22; *М. Малкиель* (Кишинев) 3, 4, 6; *А. Манашкин* (Днепропетровск) 18—21; *А. Масягин* (Смоленск) 4, 6, 10, 11, 18—20; *М. Матвеев* (Каигш) 6, 10, 18—22; *Ю. Матрухович* (Минск) 4, 10, 12, 14, 19, 20; *А. Матякубов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 19, 20; *Ю. Маянц* (Чернигов) 19—21; *А. Мень* (Симферополь) 3; *Г. Метревели* (Цхинвали) 14, 18; *П. Мидодашвили* (Цхинвали) 8, 10, 11, 13, 14, 18, 19; *Ю. Минаев* (Киев) 6, 8, 10—14, 16, 18—22; *А. Могильнер* (Свердловск) 11; *М. Молдовский* (Тбилиси) 19; *К. Морозов* (Пермь) 3, 4, 6, 8, 10—12, 14—16; *Е. Морозова* (Ленинград) 18, 19; *М. Муллаяров* (с. Малый Ашап Пермской обл.) 4, 8, 10, 11; *О. Мусаев* (Баку) 3, 4, 6, 8, 10, 12—14, 18, 20, 21; *Ю. Мухарский* (Киев) 3—22; *Б. Налибоцкий* (Минск) 3, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 18—20, 22; *Б. Наткович* (Тбилиси) 19; *В. Нескоромный* (Рубежное) 10, 19; *И. Нескоромный* (Симферополь) 8, 10, 11, 14, 18—21; *С. Нестер* (Днепропетровск) 8, 19—21; *А. Никитенков* (Великие Луки) 6, 8—10, 12—16, 18—22; *Н. Никифоров* (Великие Луки) 9, 18; *О. Николаев* (с. Верхневилюйск ЯАССР) 20; *В. Носик* (с. Бабинищи Ивано-Франковской обл.) 4, 6, 18—22; *И. Овсянников* (Саратов) 8, 11, 18; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) 10, 13—15, 18, 19, 22; *А. Окоприенко* (Кривой Рог) 8, 9, 12; *М. Османов* (ст. Акстафа АзССР) 18; *К. Оспанов* (Байрам-Али) 19; *В. Палей* (Харьков) 3, 4, 6, 8, 9, 11,18—21; *С. Панин* (Тула) 3, 4, 8; *О. Певзнер* (Днепропетровск) 14, 18, 22; *А. Петухов* (Цимлянск) 19, 20; *М. Петушков* (Магнитогорск) 18, 19; *В. Писецкий* (Запорожье) 8, 12, 18—20, 22; *П. Побылица* (Ленинград) 3, 8, 10, 13—15, 19—21; *А. Полванов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 21; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 4, 6, 8, 11, 14—16, 18—22; *С. Попов* (Москва) 6, 13—16, 18—22, *В. Потемкин* (Великие Луки) 18—21; *А. Родин* (Великие Луки) 8; *С. Розуван* (Киев) 18—20; *А. Романов* (Киев) 18—22; *В. Романов* (с. Камышино Курской обл.) 8, 9; *И. Романов* (Москва) 19; *Ю. Ростовцев* (Горький) 3, 19, 21; *А. Рудерман* (Ленинград) 3, 4; *А. Рудницкий* (Киев) 8, 9; *О. Рябухин* (Свердловск) 8, 9; *И. Савченко* (Киев) 10, 18, 19, 21, 22; *П. Саипов* (Ташкент) 4; *Г. Салахлы* (с. Сарачло ГрССР) 4, 6; *М. Салахлы* (с. Сарачло ГрССР) 4; *Г. Санадзе* (Тбилиси) 19; *А. Сахарук* (Брест) 6, 10, 18, 19; *С. Секацкий* (п. Кант КиргССР) 20, 21; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 19—21; *Л. Скатков* (Харьков) 6, 18—22; *С. Скоморощенко* (Красноводск) 19; *Н. Слесарев* (п. Широкий Ворошиловградской обл.) 18; *В. Смирнов* (Ленинград) 19; *В. Смирнов* (Уфа) 8, 18—22; *А. Смышляев* (Ленинград) 14; *А. Соловьев* (Ульяновск) 8; *Н. Сорокин* (Днепропетровск) 4, 9—11, 14, 15; *С. Соскин* (Киев) 3, 4, 6; *П. Стаднюк* (п. Уч-Кузук Бухарской обл.) 18, 19; *В. Стовба* (Москва) 4, 8, 13, 14, 18, 19, 22; *Х. Сулейманов* (Араванский р-н Ошской обл.) 21; *Р. Султанов* (Ташкент) 18, 19; *В. Суслов* (Александров) 20, 21; *А. Суханов* (с. Бутырки Воронежской обл.) 20; *М. Сухарь* (Москва) 8; *Б. Тазжиков* (Новосибирск) 14, 21; *Р. Тененбаум* (Киев) 18, 19, 21; *И. Толох* (Жидачов) 4, 18—22; *Г. Торонова* (Усмань) 19; *К. Третьяченко* (Киев) 3, 4, 6, 8, 9, 11—16, 18—22; *К. Трутнев* (Казань) 3, 4, 6, 8—12, 14—16; *Ю. Туллер* (Новороссийск) 19; *Е. Усина* (Великие Луки) 19—21; *А. Фальковский* (Алма-Ата) 19, 21; *А. Фарбер* (Тамбов) 4, 18, 19, 21, 22; *Н. Федин* (Омск) 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 18, 19—22; *В. Федотов* (Балхаш) 8; *В. Филатов* (Мурманск) 19—21; *А. Фомин* (Новосибирск) 18—21; *А. Хачатуров* (Баку) 18—20; *А. Худошин* (Харьков) 4, 9, 14, 16, 20, 22; *Е. Хусаинов* (Артем) 19, 20; *М. Цодыкс* (Новокузнецк) 18—22; *И. Цуркис* (Калининград) 3, 4, 8, 12, 14, 18, 19—22; *В. Чеканов* (Быхов) 8, 10, 14, 19, 21; *Л. Черных* (Лида) 4, 6, 8, 9, 14, 22; *Ю. Черняев* (Белгород) 4; *А. Чурилов* (Харьков) 6, 11, 19; *Г. Шарипов* (с. Угали БАССР) 14, 19—22; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 3, 8, 9; *А. Шафаренко* (Караганда) 4, 8, 14, 18—22; *К. Шахназарян* (Баку) 8, 19—21; *А. Швейдель* (Великие Луки) 8; *А. Шептовецкий* (Москва) 3, 4, 6, 8, 11, 12, 14, 18—22; *И. Шибут* (Барановичи) 9; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 3, 11, 13, 18—22; *И. Шиян* (Киев) 8, 9, 11—16, 18—22; *О. Шлыгин* (Новосибирск) 4; *С. Штейнер* (Гомель) 21, 22; *Ю. Штейнштрайбер* (Баку) 4, 10—12, 18—22; *Р. Шувар* (п. Рогатин Ивано-Франковской обл.) 4, 6, 10, 11, 14, 16, 18—22; *М. Шупов* (Москва) 19, 20, 22; *В. Щукин* (Ленинград) 3, 4, 6, 8, 10, 13—16, 18—22; *М. Яблоков* (Москва) 19; *Р. Яламетдинов* (Уфа) 19—21; *А. Яременко* (Кадиевка) 18, 19.



К статье «Куйбышевский государственный университет»

Математика

Вариант 1

1. $V=\dfrac{\pi l^3 k^3 \cos^3\alpha \sin^2\alpha \sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}$

при k [0,1];

$$V=\frac{\pi l^3 k^3 \cos^3\alpha \sin^2\alpha \sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}-$$

$$-\frac{\pi l^3 (k-1)^3 \cos^3\alpha \sin^2\beta}{3\cos^2\beta}$$

при $k\in]1;1+\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta]$;

$$V=\frac{\pi l^3 \sin^2\alpha\cos\alpha}{3}$$

при $k\in]1+\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta;\infty[$. 2 $x\in[1;2]$. Указание. $x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2$. 3. $x\in[a-\sqrt{a^2+8};0[\cup]2a;a+\sqrt{a^2+8}]$. 4. $(x,y)\in\{(1/2;-1/2),(-1/2;1/2),(1;0),(-1;0),(0;1),(0;-1)\}$.

Вариант 2

1. Пусть $\gamma=\arcsin(1/\sqrt{1+A^2})$, где $A=\sin 2\beta\operatorname{tg}\alpha$. Тогда $k\in[\sin\gamma;\max\{1;1/A\}]$; при этом $\varphi_1=-\gamma+\arcsin\left(\dfrac{\sin\gamma}{k}\right)$ при $k\in[\sin\gamma;1]$ и $\varphi_2=-\arcsin\left(\dfrac{\sin\gamma}{k}\right)+\pi-\gamma$ при $k\in[\sin\gamma;1/A]$ (в пересечении областей два решения).
2. $x=(-7+\sqrt{13})/3$. 3. $x\geqslant 10$. 4. $x=\pi/4+k\pi/2$, $y=\pm\operatorname{arctg}2+n\pi$, $z=\pi-x-y$ $(n,k\in Z)$.

Вариант 3

1. $k\in[2\sqrt{3}/3;3/2[$, $\alpha_1=2\arccos(^1/_4\times(k+\sqrt{k^2+4}))$, $\alpha_2=3\arccos[(k+\sqrt{k^2+4})/4]$. 2. $x\geqslant 5$.
3. $x_1=\pi/4+k\pi/2$, $x_2=\pm\pi/3+k\pi$ $(k\in Z)$.
4. $x\in]0;10^{\left(-\lg 20\sqrt{2}-\sqrt{\lg^2\sqrt{2}+\lg 80}\right)/\lg 2}]\cup[10^{\left(-\lg 20\sqrt{2}+\sqrt{\lg^2\sqrt{2}+\lg 80}\right)/\lg 2};1[\cup]1;\infty[$.

Вариант 4

1. $2\arccos 2k$; $k\in]0;\sqrt{2}/4[$. 2. $x=0$. 3. $x_1=k\pi$, $x_{2,3}=\pm\arccos[(1+\sqrt{5+4b})/4]+2k\pi$, $x_{4,5}=\pm\arccos(1/4\times(1-\sqrt{5+4b}))+2k\pi$ $(k\in Z)$ при $b\in[-5/4;1[$; $x=x_1$, $x=\pm 2\pi/3+2k\pi$ при $b=1$; $x=x_1$, $x=x_{4,5}$ при $b\in]1;5[$; $x=x_1$ при $b=5$; решений нет при $b\in]-\infty;-5/4[\cup]5;\infty[$. 4. $x\in]0;(3-\sqrt{5})/2]\cup]1;(3+\sqrt{5})/2]$.

Физика

Механико-математический факультет

1. $\mu=\dfrac{h}{a+l}=0{,}05$.
2. Напряженность поля не изменится.
3. $n_к=n_{ст}\dfrac{l_1}{l_2}\approx 2{,}4$.

Физический факультет

1. См. рис. 1.
2. $|\Delta q|=\left|\dfrac{q_2r_1-q_1r_2}{r_1+r_2}\right|\approx 7$ ед. заряда СГСЭ.
3. $F'=F\dfrac{n_{ст}-1}{n_{ст}/n_в-1}\approx 60$ *см*.

К статье «Московский институт управления им. С. Орджоникидзе»

Математика

Вариант 1

1. 13 *см*, 15 *см*. Указание. Найти тангенсы половин углов треугольника. 2. $x\in]1;3[$. 3. $x\in\{0,1/2\}$. 4. $x_1=\pi/2+k\pi$, $x_2=2k\pi/11$ $(k\in Z)$. 5. $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$.

Вариант 2

1. $2H^2\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 2. $p\in]-3;6[$ 3. $x=2$. 4. $x_1=k\pi/3$, $x_2=\pm\pi/18+k\pi/3$ $(k\in Z)$. 5. 4.

Вариант 3

1. $\sqrt{b(a+b)}$. 2. $x\in\{-1,1\}$. 3. $x\in]5/2;\infty[$. 4. $t_1=\pi/2+k\pi$, $t_2=\pi/3+2k\pi/3$ $(k\in Z)$.

Физика

1. $T_1=m\left(4\pi^2n^2l-\left|\vec{g}\right|\right)\approx 8{,}58$ *н*; $T_2=m\left(4\pi^2n^2l+\left|\vec{g}\right|\right)\approx 9{,}17$ *н*.
2. $p=\dfrac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}\approx 5{,}1\cdot 10^3$ *мм рт.ст.*
3. $Q=\dfrac{C_1C_2(U_1-U_2)^2}{2(C_1+C_2)}=5\cdot 10^{-4}$ *дж*.

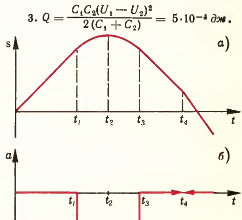


Рис. 1.

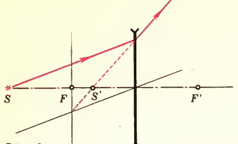


Рис. 2.

4. $q = \pi r^2 NC \frac{\left|\Delta \vec{B}\right|}{\Delta t} \approx 1{,}26 \cdot 10^{-7}$ *к*.

5. $d = 1{,}2$ *м* (см. рис. 2).

К статье «Московский институт инженеров землеустройства»

Вариант 1

1. $\frac{x+2y}{3}$. 2. $x \in]4;\ 6[$. 4. $H^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha/4$.

Вариант 2

1. $\frac{3}{2(1-x)}$. 2. $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$. 3. 2, 4, 8; 8, 4, 2. 4. $\sqrt{3}\, a^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha/4$.

Вариант 3

1. $\left|z^{1/p} - z^{1/q}\right|$. 3. $-4 < x < -2$; $0 < x < 2$. 4. $\frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Вариант 4

1. $\frac{2(p+q)}{p-q}$. 2. $x = 6$. 3. $4 \cos 2\alpha \times \cos(\alpha+\pi/6) \cos(\alpha-\pi/6)$. 4. $\frac{h^3 \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}$.

К статье «Курский политехнический институт»

Математика

Вариант 1

1. $\frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta)}}{\cos \alpha \cos \beta}$.

2. $x \in]-\infty;\ -1] \cup [3;\ \infty[$. 3. $x_1 = \pi/4 + k\pi/2$, $x_2 = \pm\pi/6 + k\pi$ $(k \in Z)$. 4. $x = 3$.

Вариант 2

1. $2\pi R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} / \cos \alpha$. 2. $x = 8$. 4. $[2;\ 5] \cup \{10\}$.

Вариант 3

1. $2R^3 \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha \sin^3 2\alpha/3$. 2. $x = 3/2$. 4. $]-\infty;\ 4] \cup \{5\}$.

Физика

1. $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{v}_0\right|^2/2s = 4 \cdot 10^5$ *м/сек²*; $t = 10^{-3}$ *сек*; $\left|\vec{v}\right| \approx 280$ *м/сек*.

2. $h = \frac{\left|\vec{v}\right|^2 t}{R\left|\vec{g}\right|} = 8{,}4$ *см*.

3. $h = \frac{m^2 \left|\vec{v}_0\right|^2}{2\left|\vec{g}\right|(m+M)^2} \approx 0{,}8$ *м*.

4. $T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} \frac{V_2}{V_1} \approx 563°\text{K} = 290°\text{C}$.

5. $m_п = \frac{c_ж m_ж (t_ж - t) - c_в m_в (t - t_в)}{\lambda_в} = 0{,}12$ *кг*.

6. $\eta_1 = \frac{(c_в m_в + c_а m_а)(t_2 - t_1)}{q_к m_к} \approx 44\%$;

$\eta_2 = \frac{c_в m_в (t_2 - t_1)}{q_к m_к} \approx 38\%$.

7. $\varphi_2 = \varphi_1 - m\left|\vec{v}_0\right|^2/2e = 315$ *в*.

8. $r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} = 1$ *ом*;

$\mathscr{E} = I_1(R_1 + r) = 2{,}4$ *в*.

9. $l = \frac{\mathscr{E}}{\left|\vec{B}\right|\left|\vec{v}\right|} = 1$ *м*.

10. $d_1 = {}^5/_4 F = 12{,}5$ *см*;

$d_2 = {}^3/_4 F = 7{,}5$ *см*.

К задачам «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. Струбциника.
2. Если лист бумаги — четырехугольник, то согнуть его по диагонали, а затем (расправив) согнуть так, чтобы совпали две противоположные стороны.
3. 36 учеников.
4. 180 ударов.
5. 98.

Над номером работали:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили художники:
М. Дубах, М. Златковский, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова, П. Чернуский

Зав. редакцией Л. Чернова
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/IV-77
Подписано в печать 3/VI-77
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л.6,63 Т-0,8478
Цена 30 коп. Заказ 845. Тираж 288 800 экз.

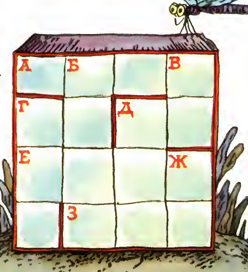
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области



Удивительные цифры

Приведенная здесь запись обладает удивительным свойством. Посмотрите на нее из левого нижнего угла журнала. Вы увидите правильно выполненный пример на сложение. Теперь посмотрите из правого нижнего угла. Что вы видите? Опять правильно выполненный пример на сложение! К тому же в нем использованы все цифры от 1 до 9.

Попробуйте найти еще одну такую запись цифр от 1 до 9.



Кроссчамбер

В каждую клетку надо вписать одну цифру (красные линии — границы чисел).

По горизонтали: **А.** Число с последовательно убывающими цифрами. **Г.** Степень некоторого числа. **Д.** Квадрат некоторого числа. **Е.** Число с последовательно возрастающими цифрами. **З.** Произведение трех последовательных целых чисел.

По вертикали: **Б.** Число кратное 11. **В.** Нечетное число. **Г.** Куб некоторого числа. **Д.** Квадрат простого числа. **Ж.** Сумма пяти последовательных целых чисел.

Л. Мочалов

Цена 30 коп.
Индекс 70465

16-88

На этом рисунке вы видите несколько правильных выпуклых и звездчатых пятиугольников и десятиугольников. О вопросах, связанных с построением правильных n-угольников с помощью циркуля и линейки, рассказывается в статье А. Кириллова на с. 2. Рисунок на обложке выполнен электронной вычислительной машиной по программе, составленной Ю. Котовым.

